

O **ELITE CURITIBA** aprova mais porque tem qualidade, seriedade e profissionalismo como lemas. Confira nossos resultados e comprove porque temos mais a oferecer.



ITA
Por 4 anos consecutivos a maior aprovação do Paraná

2008: 3 dos 4 aprovados do Paraná
2007: Os 2 únicos aprovados do PR
2006: Os 3 únicos aprovados de Curitiba
2005: 2 dos 3 aprovados do Paraná

IME

2009: Do SUL inteiro foram 8 aprovados, todos de Curitiba, e 6 são ELITE !!!
2008: 10 aprovados (3 primeiros da Ativa, 5º da Ativa e 6 entre os 10 1ºs da Reserva)
2007: 11 dos 16 aprovados do Paraná, incluindo os 4 melhores da ativa e os 4 melhores da reserva
2006: Os 4 únicos aprovados do Paraná
2005: 7 aprovados e os 3 únicos convocados do Paraná



ESPCEX

2008: 9 aprovados
GUILHERME PAPATOLO

CONCEIÇÃO

1º do Paraná e 9º do Brasil
BRUNO TRENTINI LOPES RIBEIRO
2º do Paraná e 32º do Brasil
2007: 9 alunos convocados no Paraná
2006: 9 alunos convocados no Paraná (turma de 20 alunos)
2005: 100% de aprovação!



AFA

2009: 15 aprovados entre os 20 do Paraná (incluindo os 3 primeiros lugares)
Leonardo Augusto Seki: 2º lugar nacional e 1º do Paraná
2008: 13 aprovados
1ºs lugares do Paraná em todas as opções de carreira
2007: 10 dos 14 convocados do Paraná
2006: 11 dos 18 convocados do PR, incluindo:
1º Lugar do Paraná (6º do Brasil) em Aviação
1º Lugar do Paraná (9º do Brasil) em Intendência



EPCAr

2007: 3 dos 4 convocados do Paraná
2006: 2 convocados
2005: 1º lugar do Paraná



EEAR

2008: 4 aprovações
(2ºs lugares dos grupos 1 e 2)
2006: 2 convocados

Escola Naval

2008: 9 aprovados
2007: 70% de aprovação na 1ª fase
2005: 100% de aprovação!



UFPR

2008: 9 aprovados
2007: 70% de aprovação na 1ª fase
2006: 1º Lugar em Eng. Mecânica
2º Lugar em Eng. Eletrônica
2005: 1º Lugar Direito (matutino)
1º Lugar Relações Públicas

UFTPR

Inverno 2008:
1º, 2º e 4º lugares em Eng. Ind. Mecânica
1º e 2º lugares em Eng. Eletrônica / Eletrotécnica
1º lugar em Eng. de Computação
Verão 2008: 13 aprovados
2007: 11 aprovados em vários cursos
2006: 1º Lugar em Eng. Mecânica
2º Lugar em Eng. Eletrônica
2005: 85% de aprovação em Engenharia, com 5 dos 8 1ºs colocados de Eng. Mecânica.



Só no **ELITE** você encontra:

Simulados semanais/quinzenais;
A maior carga horária.
Os melhores professores!

Início das inscrições para o exame de bolsas:

4 / 1 / 2009

Realização do exame de bolsas:

5 / 2 / 2009



Fone : **3013-5400**

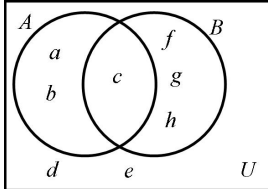
www.ELITECURITIBA.com.br

MATEMÁTICA

01. Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^c \cup A)^c = \{f, g, h\}$, $B^c \cap A = \{a, b\}$ e $A^c \cap B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a
A () 0 B () 1 C () 2 D () 4 E () 8

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 01: Alternativa C

De acordo com o enunciado podemos montar o seguinte diagrama de Euler-Venn:



De onde concluímos que $A \cap B = \{c\}$, $n(A \cap B) = 1$ e $n(P(A \cap B)) = 2^1 = 2$

02. Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a
a) 246 b) 252 c) 260 d) 268 e) 284

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 02: Alternativa B

Denominando:

G : número de carros originalmente com motor a gasolina

F : número de carros originalmente com motor "flex"

Como 36% dos carros com motor a gasolina passaram a funcionar com gás GNV, temos:

$0,36 \cdot G$ são os carros a gasolina e a GNV (*bicombustíveis*)

$0,64 \cdot G$ são os carros que continuaram apenas a gasolina

Como 36% dos carros com motor "flex" passaram a funcionar também com gás GNV, temos:

$0,36 \cdot F$ são os carros a álcool, gasolina e a GNV (*tricombustíveis*)

$0,64 \cdot F$ são os carros que continuaram a funcionar apenas a álcool e a gasolina (*bicombustíveis*).

Sabendo que 556 carros são bicombustíveis e que no total temos 1000 carros, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,36 \cdot G + 0,64 \cdot F = 556 \\ G + F = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,36 \cdot G + 0,64 \cdot F = 556 \\ 0,36 \cdot G + 0,36 \cdot F = 360 \end{cases} \Rightarrow 0,28 \cdot F = 196$$

Portanto $F = 700$ e $G = 300$

Desta forma, o número de carros tricombustíveis (álcool, gasolina e GNV) é $0,36 \cdot F = 0,36 \cdot 700 = 252$

03. Seja $f: IR \rightarrow IR \setminus \{0\}$ uma função satisfazendo às condições: $f(x+y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in IR$ e $f(x) \neq 1$, para todo $x \in IR \setminus \{0\}$.

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar. II. $f(0) = 1$.

III. f é injetiva. IV. f não é sobrejetiva, pois

$f(x) > 0$ para todo $x \in IR$.

é (são) falsa(s) apenas

A () I e III.

B () II e III.

C () I e IV.

D () IV.

E () I.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 03: Alternativa E

Contra-domínio = $IR \setminus \{0\}$

Logo $f(x) \neq 0, \forall x \in IR$.

A afirmação II é VERDADEIRA, pois:

Substituindo $y = 0$ na função:

$$f(x+0) = f(x) \cdot f(0) \text{ e como } f(x) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

A afirmação I é FALSA, pois:

Substituindo $y = -x$ e sendo $f(x) \neq 0$ e $f(0) = 1$

$$\Rightarrow f(x-x) = f(x) \cdot f(-x)$$

$$\Rightarrow f(0) = f(x) \cdot f(-x) = 1 \quad (1)$$

Se f for função ímpar, então $f(-x) = -f(x)$

Em (1) $\Rightarrow f^2(x) = -1$ **ABSURDO** pois,

$f(x) \in IR \setminus \{0\}$ e $f^2(x)$ é positivo sempre.

Logo f não é função ímpar.

A afirmação IV é VERDADEIRA, pois:

$$\text{Para } x = y = \frac{x}{2} \Rightarrow f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in IR \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in IR \quad (2)$$

Logo f não é sobrejetiva, pois $Im = IR_+ \setminus \{0\} \neq$ Contra-Domínio

A afirmação III é VERDADEIRA, pois:

Tomando x_1 e x_2 números reais do domínio, e $x_2 > x_1$, então

$$x_2 = x_1 + K, \text{ com } K > 0 \text{ e } K \in IR.$$

$$\text{Logo: } f(x_2) = f(x_1 + K) = f(x_1) \cdot f(K)$$

De (2) $f(K) > 0$ e dado que $f(K) \neq 1$

$$\Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1) \text{ para quaisquer } x_1 \text{ e } x_2, x_2 \neq x_1.$$

Logo f é injetiva.

Obs.: Como se trata de uma questão objetiva, o aluno pode ganhar algum tempo (se isso for necessário) imaginando um exemplo de função que satisfaça às condições dadas, como

$f(x) = a^x$, para a positivo e diferente de 1, e responder às afirmações (V ou F) tomando como base o exemplo imaginado. Não é algo rigorosamente correto, mas funciona.

04. Se $a = \cos \frac{\pi}{5}$ e $b = \sin \frac{\pi}{5}$, então, o número complexo

$$\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{54} \text{ é igual a:}$$

a) $a + bi$

b) $-a + bi$

c) $(1+2a^2b^2) + ab(1+b^2)$

d) $a - bi$

e) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 04: Alternativa B

Utilizando Moivre temos:

$$\left(\cos \frac{p}{5} + i \sin \frac{p}{5}\right)^{54} = \cos \frac{54p}{5} + i \sin \frac{54p}{5} =$$

$$\cos \frac{4p}{5} + i \sin \frac{4p}{5} = \cos\left(p - \frac{p}{5}\right) + i \sin\left(p - \frac{p}{5}\right) =$$

$$-a + bi$$

05. O polinômio de grau 4

$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c)$
com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

- A () $3 + \sqrt{3}$ B () $2 + 3\sqrt{3}$ C () $2 + \sqrt{2}$
D () $1 + 2\sqrt{2}$ E () $2 + 2\sqrt{2}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 05: Alternativa E

Sendo o polinômio uma função par, então os coeficientes de seus monômios de grau ímpar devem ser nulos, ou seja:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$$

Desta forma podemos reescrever os outros coeficientes do polinômio como:

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= (a + b + c) + b = 0 + b = b \\ a - b &= a - 2b + b = (2a - b + c) - (a + b + c) + b = 0 - 0 + b = b \\ 2(a + c) &= 2(a + b + c - b) = 2(0 - b) = -2b \end{aligned}$$

Desta forma o polinômio é reescrito como:

$$bx^4 - bx^2 - 2b$$

Como o polinômio é de grau 4 (segundo o enunciado), então $b \neq 0$ e as raízes dos polinômio são as mesmas raízes de $x^4 - x^2 - 2$, que são (por Pitágoras na equação biquadrada) $\pm i$ e $\pm \sqrt{2}$, logo

$$|i| + |-i| + |\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}| = 1 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{2 + 2\sqrt{2}}$$

06. Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 06: Alternativa C

Fatorando $f(x)$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2x^3 - 2x - 1 \\ &= x^4 - 1 + 2x^3 - 2x \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + 1)^2 \\ &= (x - 1)(x + 1)^3 \end{aligned}$$

Assim, $f \circ g(x) = f(g(x)) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)^3$.

Logo, as raízes de $f \circ g(x)$ são as raízes de:

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)^3 = 0$$

Sendo as raízes de $(x^2 - 2x)$ de multiplicidade 1 e as raízes de $(x^2 - 2x + 2)$ de multiplicidade 3. Mas:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ (raízes reais)}$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm i \text{ (raízes não reais)}$$

Portanto, a multiplicidade das raízes não reais é 3.

07. Suponha que os coeficientes reais a e b equação

$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite

solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

- I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.
II. As raízes podem ser duplas.
III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira (s)

- A () apenas I. B () apenas II.
C () apenas III. D () apenas II e III.
E () nenhuma.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 07: Alternativa A

A equação polinomial dada é recíproca, devido a ordem dos coeficientes.

A equação recíproca tem como propriedade:

Se z é raiz, então o inverso $\frac{1}{z}$ também será raiz e de mesma

multiplicidade. (1)

Como a e b são reais, então todos os coeficientes são reais, portanto pelo teorema das raízes imaginárias: Se z é raiz, então

o seu conjugado \bar{z} também será raiz. (2)

De (1) e (2), e sabendo que r não é real e é raiz:

$\frac{1}{r}, \frac{1}{\bar{r}}$ e r também são raízes, também não reais.

$$r \cdot \bar{r} = |r|^2 \neq 1 \text{ (dado } |r| \neq 1) \Rightarrow r \neq \frac{1}{r} \text{ e } \bar{r} \neq \frac{1}{\bar{r}} \text{ e } r \neq \bar{r},$$

então todas as quatro raízes são distintas e não reais.

Logo, podemos concluir que:

- I. Verdadeira II. Falsa e III. Falsa

08. Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada

ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a:

- a) -3 b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 1 e) 3

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 08: Alternativa B

Sem perda de generalidade, podemos dizer que (x_1, x_2, x_3) é, nesta ordem, a PG das soluções da equação dada.

Pelas relações de Girard, temos:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -54/2 = -27$$

$$\Rightarrow x_2^3 = -27 \text{ (i), pois } x_2^2 = x_1 \cdot x_3. \text{ Assim:}$$

$$2x_2^3 - ax_2^2 + bx_2 + 54 = 0 \Rightarrow 2(-27) - ax_2^2 + bx_2 + 54 = 0$$

$$\Rightarrow ax_2^2 = bx_2 \Rightarrow x_2 = b/a \text{ (ii), pois } x_2 \neq 0$$

De (ii) concluímos que x_2 é um número real (a e b são reais),

o que nos leva a concluir de (i) que $x_2 = -3$ e assim

$$b/a = -3 \Rightarrow \boxed{a/b = -1/3}$$

09. Dados $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, dizemos que

$X_0 \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema

$AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t (AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

- a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 09: Alternativa E

O sistema dado representa $AX = b$ para $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Assim, } AX - b = \begin{pmatrix} -x - 1 \\ y - 1 \\ x - 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\sqrt{(AX - b)^T (AX - b)} = \sqrt{(-x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)^2} =$$

$$\sqrt{2(x^2 + 1) + (y - 1)^2} \text{ o que assume valor mínimo para}$$

$$x = 0 \text{ e } y = 1.$$

10. O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

- determinado.
- determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
- determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
- impossível.
- indeterminado.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 10: Alternativa D

Multiplicando a primeira equação do sistema por c_1 e a segunda equação por c_2 , temos:

$$\begin{cases} a_1c_1 \cdot x + b_1c_1 \cdot y = c_1^2 \\ a_2c_2 \cdot x + b_2c_2 \cdot y = c_2^2 \end{cases}$$

Somando ambas as equações membro a membro, temos:

$$(a_1c_1 + a_2c_2) \cdot x + (b_1c_1 + b_2c_2) \cdot y = c_1^2 + c_2^2$$

Equação esta que, por ser uma combinação linear das demais, também deve ser satisfeita para as soluções do problema.

Mas, de acordo com o enunciado, temos:

$$a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$$

Isso nos leva a $0x + 0y = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow c_1^2 + c_2^2 = 0$. Como $c_1 \in \mathbb{R}$ e $c_2 \in \mathbb{R}$, temos $c_1 = c_2 = 0$, o que é **impossível** de acordo com a condição $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

11. Seja $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $\text{tr}A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

- $\frac{101}{25}$.
- $\frac{121}{25}$.
- 5.
- $\frac{49}{9}$.
- $\frac{25}{4}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 11: Alternativa A

$A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ é matriz simétrica $\Rightarrow a_{21} = a_{12} \dots (1)$

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} = 5a_{11} \Rightarrow a_{22} = 4a_{11} \dots (2)$$

Como (a_{11}, a_{12}, a_{22}) estão em P.G., então

$$a_{22} = a_{11} \cdot q^2 \xrightarrow{(2)} 4a_{11} = a_{11} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 4$$

Temos que $AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0$

Como o sistema admite solução não nula e este sistema é homogêneo, então ele é possível e indeterminado

$$\Rightarrow \det(A - I) = 0$$

$$\text{Usando (1) e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{11} - a_{22} + 1 - a_{12}^2 = 0 \dots (3)$$

Da P.G.: $a_{12}^2 = a_{11} \cdot a_{22}$, o que em (3)

$$\Rightarrow a_{11} + a_{22} = 1 \xrightarrow{(2)} a_{11} + 4a_{11} = 1 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 + q^2 = \frac{1}{25} + 4 = \frac{101}{25}$$

12. Uma amostra de estrangeiros, em que 18% são proficientes em inglês, realizou um exame para classificar a sua proficiência nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% foram classificados como proficientes. Entre os não proficientes em inglês, 7% foram classificados como proficientes. Um estrangeiro desta amostra, escolhido ao acaso, foi classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

- 73%.
- 70%.
- 68%.
- 65%.
- 64%.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 12: Alternativa B

Sejam p e c os eventos "ser proficiente" e "ser classificado como proficiente", respectivamente. Sendo P a função probabilidade deste problema, temos do enunciado:

$$P(p) = 0,18, P(c | p) = 0,75 \text{ e } P(c | \bar{p}) = 0,07.$$

A probabilidade pedida é $P(p | c)$.

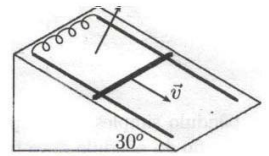
Pelo Teorema de Bayes:

$$P(p | c) = \frac{P(p) \cdot P(c | p)}{P(c)} = \frac{P(p) \cdot P(c | p)}{P(p) \cdot P(c | p) + P(\bar{p}) \cdot P(c | \bar{p})}$$

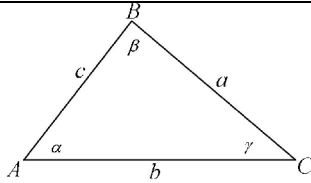
$$P(p | c) = \frac{0,18 \cdot 0,75}{0,18 \cdot 0,75 + 0,82 \cdot 0,07} = \frac{0,135}{0,1924} \approx 0,70166$$

13. Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ e $\gamma = \widehat{BCA}$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx \cos \alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

- $\alpha = 90^\circ$
- $\beta = 60^\circ$
- $\gamma = 90^\circ$
- O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45^\circ$
- O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO 13: Alternativa E



Se substituirmos o valor c na equação dada obteremos a Lei dos Cossenos aplicada ao ângulo a .

Mas além de ser raiz, c é raiz dupla, ou seja, a equação possui discriminante nulo ($\Delta=0$), e aí está a real informação do enunciado:

$$(2b \cos a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow b^2 \cos^2 a - b^2 + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 a$$

Como a , b e $\operatorname{sen} a$ são todos positivos, temos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{a}{b} \quad (i)$$

Por (i) o aluno já se convence de que o triângulo é retângulo em b , pois a seria o "cateto oposto" e b a hipotenusa. Para confirmar basta usar, por exemplo, a Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} a} = \frac{b}{\operatorname{sen} b} \Rightarrow \operatorname{sen} b = \frac{b \operatorname{sen} a}{a} \xrightarrow{(i)} \boxed{\operatorname{sen} b = 1}$$

14. No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t: x = 1$ e ao ponto $A = (3,2)$ é igual a 4. Então, S é

- a) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2,1)$.
- b) uma circunferência de raio 1 e centro $(1,2)$.
- c) uma hipérbole.
- d) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
- e) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 14: Alternativa D

Seja $P(x,y)$ um ponto que pertence ao lugar geométrico S . Temos:

$$(d_{P,t})^2 + (d_{PA})^2 = 4$$

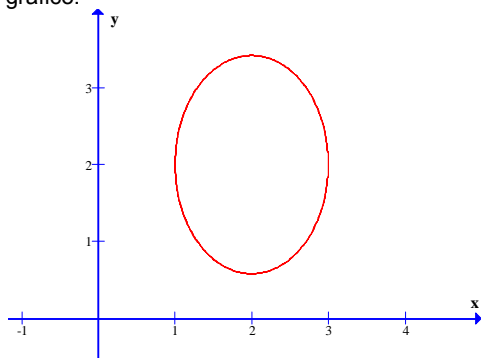
Mas $(d_{P,t})^2 = (x-1)^2$ e $(d_{PA})^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$, logo, o lugar geométrico S é dado por:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + ((x-3)^2 + (y-2)^2) &= 4 \\ x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\ 2x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$2 \cdot (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \quad (\text{dividindo por } 2)$$

$$(x-2)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

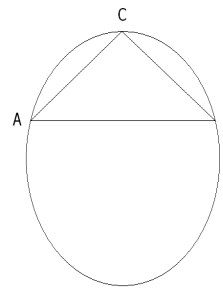
Esta equação é a equação reduzida de uma elipse com centro $C(2,2)$, eixo maior igual a $2\sqrt{2}$ e eixo menor igual a 2. Veja um esboço do gráfico:



15. Do triângulo de vértices A , B e C , inscrito em uma circunferência de raio $R = 2$ cm, sabe-se que o lado \overline{BC} mede 2 cm e o ângulo interno $\hat{A}BC$ mede 30° . Então o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a

- A () $2 - \sqrt{3}$.
- B () $\frac{1}{3}$.
- C () $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- D () $2\sqrt{3} - 3$.
- E () $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 15: Alternativa D



Aplicando o teorema dos senos:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{BC}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \hat{B}} = 2R \quad (1)$$

$$\Rightarrow AC = 2R \operatorname{sen} \hat{B}$$

$$\Leftrightarrow AC = 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \boxed{AC = 2 \text{ cm}}$$

Como $BC = 2$ cm, então o ΔABC é isósceles, e $\hat{C} = 120^\circ$

$$\text{De (1) vem: } AB = 2R \operatorname{sen} \hat{C} \Leftrightarrow AB = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

Usando a área do ΔABC :

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = p \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{2+2+2\sqrt{3}}{2} \right) \cdot r$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}) \cdot r \Leftrightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3} - 3}$$

16. A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a:

- a) 2
- b) $\frac{3}{2}$
- c) 1
- d) $\frac{3}{4}$
- e) $\frac{1}{2}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 16: Alternativa E

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 4y + 3 &= 0 \\ 2(x^2 - 2x + 1) &= 4y - 3 + 2 \\ 2(x-1)^2 &= 4y - 1 \end{aligned}$$

$$2(x-1)^2 = 4\left(y - \frac{1}{4}\right)$$

$$(x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{4}\right)$$

Vértice $v = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ e parâmetro $2p = 2 \Rightarrow p = 1$

logo a distância pedida é $\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$

17. A expressão

$$\frac{2 \left[\operatorname{sen} \left(x + \frac{11}{2} p \right) + \cot g^2 x \right] \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

é equivalente a

- a) $[\cos x - \operatorname{sen}^2 x] \cot g x$ b) $[\operatorname{sen} x + \cos x] \operatorname{tg} x$
 c) $[\cos^2 x - \operatorname{sen} x] \cot g^2 x$ d) $[1 - \cot g^2 x] \operatorname{sen} x$
 e) $[1 + \cot g^2 x] [\operatorname{sen} x + \cos x]$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 17: Alternativa A

$$\frac{2 \left[\operatorname{sen} \left(x + \frac{11}{2} p \right) + \cot g^2 x \right] \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\left[\operatorname{sen} \left(x - \frac{p}{2} \right) + \cot g^2 x \right]}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) =$$

$$[-\cos x + \cot g^2 x] \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$[\cot g^2 x - \cos x] \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{1} = \left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \cos x \right] \cdot \operatorname{sen} x =$$

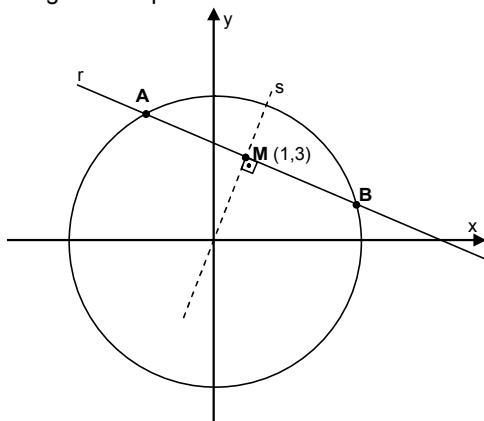
$$[\cos x - \operatorname{sen}^2 x] \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} x = [\cos x - \operatorname{sen}^2 x] \cdot \cot g x$$

18. Sejam C uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0,0)$ e \overline{AB} uma corda de C . Sabendo que $(1,3)$ é ponto médio de \overline{AB} , então uma equação da reta que contém \overline{AB} é

- a) $y + 3x - 6 = 0$ b) $3y + x - 10 = 0$
 c) $2y + x - 7 = 0$ d) $y + x - 4 = 0$
 e) $2y + 3x - 9 = 0$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 18: Alternativa B

Observe o seguinte esquema:



O ponto M é o ponto médio da corda \overline{AB} . Logo a reta que passa por M e pelo centro da circunferência (origem), aqui denominada s , é perpendicular à reta que contém a corda \overline{AB} , a qual chamaremos de r . Desta forma, determina-se o coeficiente angular de r . $m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow \left(\frac{3-0}{1-0} \right) \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{3}$

Além disso, temos que o ponto $M(1,3)$ pertence à reta r . Logo a equação de r é dada por:

$$y - y_0 = m_r (x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow -3y + 9 = x - 1$$

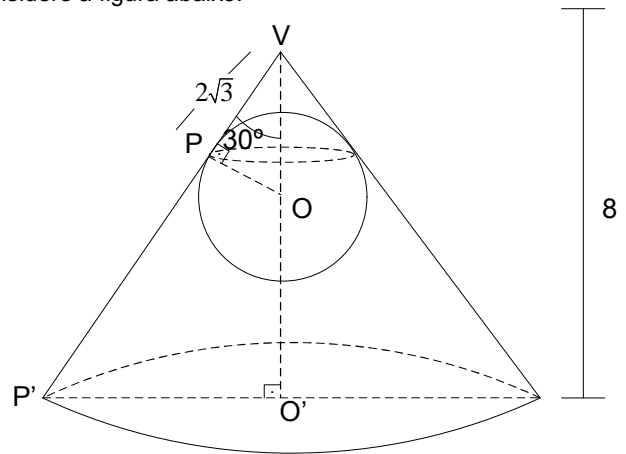
$$r: 3y + x - 10 = 0$$

19. Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60° de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3} \text{ cm}$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3 , é igual a

- A () $\frac{416}{9} p$ B () $\frac{480}{9} p$ C () $\frac{500}{9} p$
 D () $\frac{512}{9} p$ E () $\frac{542}{9} p$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 19: Alternativa A

Considere a figura abaixo:



Seja P um dos pontos de contato entre a esfera de centro O e o cone. Do enunciado $PV = 2\sqrt{3}$. Além disso, o triângulo OPV é retângulo em P . Como $OP = R$ (raio da esfera), temos:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{R}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{R = 2}$$

No triângulo retângulo $O'P'V$ temos $O'P' = R'$ (raio da base do cone). Assim:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{R'}{8} \Leftrightarrow \boxed{R' = \frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

O volume pedido é dado por:

$$V_{\text{cone}} - V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} p \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot 8 - \frac{4}{3} p (2)^3 =$$

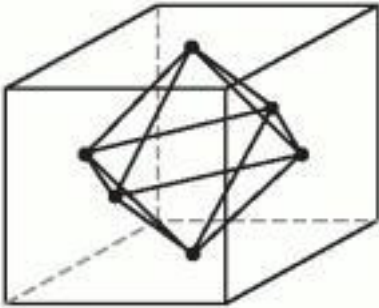
$$\Leftrightarrow V_{\text{cone}} - V_{\text{esfera}} = \frac{512}{9} p - \frac{32}{3} p$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{\text{cone}} - V_{\text{esfera}} = \frac{416}{9} p \text{ cm}^3}$$

20. Os pontos $A(3,4)$ e $B(4,3)$ são vértices de um cubo, em que \overline{AB} é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a:

- a) $\sqrt{8}$
 b) 3
 c) $\sqrt{12}$
 d) 4
 e) $\sqrt{18}$

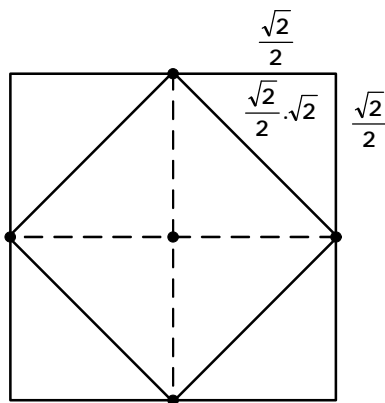
SOLUÇÃO DA QUESTÃO 20: Alternativa C



A(3,4) a B(4,3)

$$a^2 = (3-4)^2 + (4-3)^2 \Rightarrow a^2 = 1 + 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

(Visão frontal)



Cada aresta do octaedro regular é 1 cm.

Logo a área lateral pedida A_L equivale a 8 vezes a área de um triângulo equilátero de lado 1 cm.

$$\text{Então } A_L = 8 \cdot \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} \therefore A_L = \sqrt{12}$$

21. Seja S o conjunto solução da inequação $(x-9) \left| \log_{x+4}(x^3 - 26x) \right| \leq 0$.

Determine o conjunto S^C .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 21

Como $\left| \log_{x+4}(x^3 - 26x) \right| \geq 0$ para qualquer x no qual o logaritmo esteja definido, o conjunto S pode ser obtido pela interseção dos 4 seguintes conjuntos:

- 1) $x^3 - 26x > 0 \Rightarrow -\sqrt{26} < x < 0$ ou $x > \sqrt{26}$
- 2) $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$
- 3) $x+4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$
- 4) $x-9 \leq 0 \Rightarrow x \leq 9$

Ou seja,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0 \text{ e } x \neq -3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{26} < x \leq 9\} \quad (i)$$

Os únicos valores possíveis para x em S fora do intervalo definido em (i) seriam aqueles onde $x-9 > 0$ e $x^3 - 26x = 1$.

Como $(\sqrt{26})^3 - 26\sqrt{26} = 0$ e $9^3 - 26 \cdot 9 = 495$, então $x^3 - 26x = 1$ ocorre para um valor entre $\sqrt{26}$ e 9.

Além disso, $x^3 - 26x = 1$ ocorre para mais dois valores entre $-\sqrt{26}$ e 0, uma vez que o valor máximo da função $x^3 - 26x$

neste intervalo ocorre para $x = -\sqrt{\frac{26}{3}}$ (máximo local obtido através de $3x^2 - 26 = 0$) sendo portanto

$$\left(-\sqrt{\frac{26}{3}}\right)^3 - 26 \cdot \left(-\sqrt{\frac{26}{3}}\right) = \frac{52}{3} \cdot \sqrt{\frac{26}{3}} > 1.$$

Sendo assim, $x^3 - 26x = 1$ só ocorre para valores menores do que 9, já computados em (i), o que nos leva a:

$$S^C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } 0 \leq x \leq \sqrt{26} \text{ ou } x > 9\}$$

22. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in C$$

Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{Re } w \leq -13 \text{ e } \text{Im } w \leq 4\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 22

O número complexo w pode ser reescrito como:

$$w = x^2 + 3x^2i + 4y^2 - y^2i - 2x - 6xi - 16y + 4yi$$

$$w = \underbrace{x^2 + 4y^2 - 2x - 16y}_{\text{Re}(w)} + \underbrace{3x^2i - y^2i - 6xi + 4yi}_{\text{Im}(w)}$$

Temos:

$$\text{Re}(w) \leq -13$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y \leq -13$$

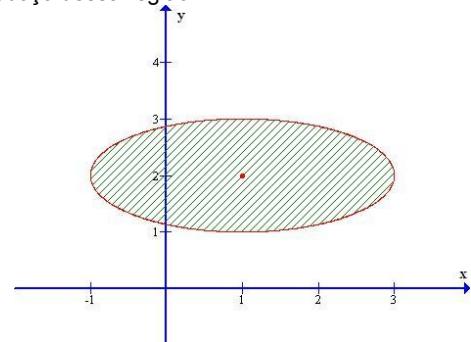
$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 16y + 16 \leq -13 + 1 + 16$$

$$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 \leq 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + (y-2)^2 \leq 1$$

A inequação acima compreende a parte interna de uma elipse com centro $C(1,2)$, eixo maior igual a 4 e eixo menor igual a 2.

Veja um esboço dessa região:



Ainda:

$$\text{Im}(w) \leq 4$$

$$3x^2 - y^2 - 6x + 4y \leq 4$$

$$3x^2 - 6x + 3 - (y^2 - 4y + 4) \leq 4 + 3 - 4$$

$$3(x-1)^2 - (y-2)^2 \leq 3$$

$$(x-1)^2 - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} \leq 1$$

A inequação acima compreende a parte interna de uma hipérbole com centro $C(1,2)$ e eixo real igual a 2. Vamos determinar as equações das assíntotas da hipérbole. Elas são dadas por:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a} \cdot (x - x_0),$$

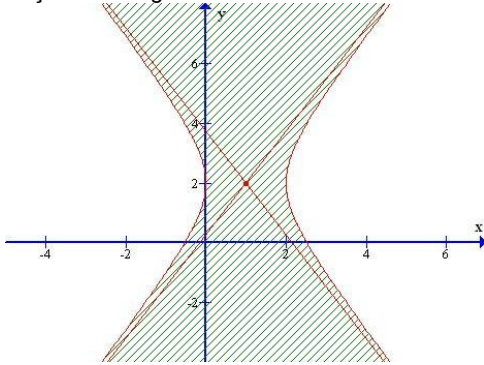
onde $x_0 = 1, y_0 = 2, a = 1$ e $b = \sqrt{3}$.

Então:

$$y - 2 = \pm\sqrt{3} \cdot (x - 1)$$

$$y = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} + 2 \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} + 2$$

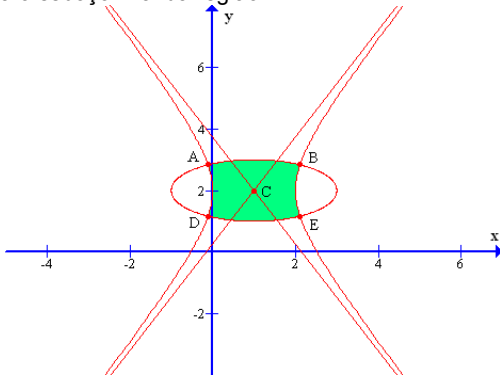
Veja um esboço dessa região:



Os pontos de intersecção da elipse com a hipérbole podem ser calculados resolvendo-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2^2} + (y-2)^2 = 1 \\ (x-1)^2 - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pm 4\sqrt{13} + 13}{13} \quad \text{e} \quad y = \frac{\pm 3\sqrt{13} + 26}{13}$$

Veja agora o esboço final da região Ω :



Onde:

$$A\left(\frac{-4\sqrt{13} + 13}{13}, \frac{3\sqrt{13} + 26}{13}\right), \quad B\left(\frac{4\sqrt{13} + 13}{13}, \frac{3\sqrt{13} + 26}{13}\right), \quad C(1, 2),$$

$$D\left(\frac{-4\sqrt{13} + 13}{13}, \frac{-3\sqrt{13} + 26}{13}\right) \quad \text{e} \quad E\left(\frac{4\sqrt{13} + 13}{13}, \frac{-3\sqrt{13} + 26}{13}\right).$$

23. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}.$$

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{f(x); x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ e $f^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 23

$$a) f(x) = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tais que $x_1 \neq x_2$

Somando-se 1: $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$

Invertendo-se: $\frac{1}{x_1+1} \neq \frac{1}{x_2+1}$

Somando-se 2: $2 + \frac{1}{x_1+1} \neq 2 + \frac{1}{x_2+1}$
 $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ou seja $f(x)$ é injetora. (cqcd)

b) O que se pede é a imagem de f , ou seja, o domínio de f^{-1} , além da própria f^{-1} .

$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$, substituindo x por $f^{-1}(x)$ e $f(x)$ por x :

$\Rightarrow x = \frac{2f^{-1}(x)+3}{f^{-1}(x)+1}$, isolando $f^{-1}(x)$

$\Rightarrow x \cdot f^{-1}(x) + x = 2f^{-1}(x) + 3$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

E assim $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

24. Suponha que a equação algébrica:

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

Tenha coeficientes reais a_0, a_1, \dots, a_{10} tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $b + ig_n$, em que $b, g_n \in \mathbb{R}$ e os $g_n, n=1, 2, \dots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $g \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $b = 0$, então $a_0 = 0$.

II. Se $a_{10} = 0$, então $b = 0$.

III. Se $b = 0$, então $a_1 = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 24

Como os coeficientes são todos reais, então se $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) é raiz, $a - bi$ também será.

Então as 11 raízes serão da seguinte forma:

$(\beta - i\gamma_1 \text{ e } \beta + i\gamma_1)$ serão raízes.

$(\beta - i\gamma_2 \text{ e } \beta + i\gamma_2)$ serão raízes.

⋮

$(\beta - i\gamma_5 \text{ e } \beta + i\gamma_5)$ serão raízes.

Como existe um número ímpar de raízes, então $\gamma_6 = 0$ e β também é raiz da equação (raiz real única).

I- Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$ (Verdadeiro)

Justificativa: Se $x = 0$ é raiz, então:

$$0 + \sum_{n=1}^{10} a_n \cdot 0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$$

II – Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$ (Verdadeiro).

Justificativa: Das relações de Girard temos que a soma das raízes é dada por $-a_{10}$, então:

$$(\beta - i\gamma_1) + (\beta + i\gamma_1) + (\beta - i\gamma_2) + (\beta + i\gamma_2) + \dots + (\beta - i\gamma_5) + (\beta + i\gamma_5) + \beta = 11\beta = -a_{10}.$$

Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.

III – Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$ (Falso).

Justificativa: O produto das raízes agrupadas 10 a 10 é igual a $-a_1$. Então se $\beta = 0$ temos:

$$-a_1 = (\beta^2 + \gamma_1^2) \cdot (\beta^2 + \gamma_2^2) \dots (\beta^2 + \gamma_5^2) = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_5)^2.$$

Como $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \neq 0$, então $a_1 \neq 0$.

25. Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 25

Pelo enunciado podemos assumir que:

1) Ao escolher uma pessoa aleatoriamente entre os inscritos, a probabilidade dela vir a obter nota suficiente para participar da segunda etapa é de 0,20 (baseado nos resultados dos anos anteriores); e

2) O número de inscritos é suficientemente grande para que a escolha de um candidato (ou de até cinco candidatos) não altere a probabilidade de um próximo escolhido passar para a segunda etapa.

Sendo assim, temos que $\binom{6}{p}(0,8)^{6-p}(0,2)^p$ é a probabilidade de que exatamente p entre os 6 escolhidos passem para a segunda etapa.

As potências de 0,8 e 0,2 representam o produto das probabilidades de cada um dos 6 escolhidos passar ou não para a segunda etapa (sendo que exatamente p passarão), enquanto

que o número binomial $\binom{6}{p}$ representa a permutação com repetição dos candidatos assim escolhidos.

Note que $\sum_{p=0}^6 \binom{6}{p}(0,8)^{6-p}(0,2)^p = (0,8+0,2)^6 = 1$, como era de se esperar. Entre os 6 escolhidos com certeza teremos exatamente p aprovados para a segunda etapa, com p assumindo qualquer valor de 0 a 6. Ou, em outras palavras, a probabilidade de termos exatamente de 0 a 6 aprovados entre os 6 escolhidos é de 100%. Sendo assim, a probabilidade de termos no mínimo 4 aprovados entre os 6 escolhidos é:

$$\binom{6}{4}(0,8)^2(0,2)^4 + \binom{6}{5}(0,8)(0,2)^5 + \binom{6}{6}(0,2)^6 =$$

$$(15 \cdot 1024 + 6 \cdot 256 + 64) \cdot 10^{-6} =$$

0,01696

26. Sejam $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 26

a) Considere as matrizes $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $X \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$$

Se AX é a matriz coluna nula:

$$A \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desse modo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases}$$

A matriz A é fixa e o resultado acima é válido para qualquer matriz X que seja escolhida. Tomando como possíveis valores de

X as matrizes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos:

$$1) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 = 0 \\ a_{21} + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 = 0 \\ a_{31} + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$$

$$2) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \cdot 0 + a_{12} + a_{13} \cdot 0 = 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} + a_{23} \cdot 0 = 0 \\ a_{31} \cdot 0 + a_{32} + a_{33} \cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases}$$

$$3) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} = 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} = 0 \\ a_{31} \cdot 0 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = 0 \end{cases}$$

Desse modo, temos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Pelo enunciado temos que A e B são matrizes não-nulas com $A \cdot B = 0$.

Por absurdo, vamos supor que $\det A \neq 0$. Nesse caso, a matriz A é inversível, e podemos multiplicar pela direita ambos os membros da equação acima pela matriz inversa de A . Assim:

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Como $B \neq 0$ temos um absurdo, de modo que $\det A = 0$.

Aplicando o mesmo raciocínio para a matriz B , encontramos que

$\det B = 0$.

27. Sabendo que $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{1}{6}p\right) = \frac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \frac{1}{2}p\right]$, determine $\operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 27

Separaremos a solução da equação na variável $\operatorname{tg}\left(x + \frac{p}{6}\right)$ em duas etapas:

$$1) \operatorname{tg}\left(x + \frac{p}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ e } 2) \operatorname{tg}\left(x + \frac{p}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Desenvolvendo a equação da primeira etapa utilizando a igualdade $\operatorname{tg}\left(x + \frac{p}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{p}{6}}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\frac{p}{6}}$ e lembrando que

$$\operatorname{tg}\frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ obtemos: } \operatorname{tg}x = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 + \sqrt{6}} \quad (i)$$

Como x é um ângulo do primeiro quadrante, podemos construir um triângulo retângulo auxiliar cujos catetos são o numerador e o denominador da expressão (i), obtendo para a hipotenusa o valor $6\sqrt{2}$, e assim:

$$\operatorname{sen}x = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{6}}{6} \quad (ii)$$

Desenvolvendo a equação da segunda etapa, de modo análogo, obtemos $\operatorname{tg}x = \frac{-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{6}} < 0$, o que é impossível para um ângulo do primeiro quadrante.

Desta forma concluímos que o único valor válido para $\operatorname{sen}x$ é o da expressão (ii), ou seja,

$$\operatorname{sen}x = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$$

28. Dadas a circunferência C: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ e a reta $r: 3x - y + 5 = 0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45° com r e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Determine uma equação da reta t .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 28

Seja a reta t procurada da forma $y = m_t x + b$.

Interessa-nos encontrar m_t e b .

Com a informação sobre a distância entre a reta t e a origem podemos inferir que:

$$\frac{|b|}{\sqrt{m_t^2 + 1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$

Como a reta t forma um ângulo de 45° com a reta r , então a diferença entre os ângulos que elas formam com o eixo x (em módulo) é igual a 45° , e então:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m_t - m_r}{1 + m_t \cdot m_r} \right|, \text{ com } m_r = 3,$$

de onde concluímos que

$$m_t = -2 \text{ ou } m_t = \frac{1}{2} \quad (2)$$

De (2) podemos dividir a resolução em duas partes:

$$1^a \text{ Parte) } m_t = -2; \text{ e } 2^a \text{ Parte) } m_t = \frac{1}{2}$$

1ª) Com o valor de $m_t = -2$ substituído em (1) obtemos

$$|b| = 3 \quad (3)$$

Como t tangencia a circunferência C, então a equação $(x - 3)^2 + (-2x + b - 1)^2 = 20$ (que nos fornece as abscissas dos pontos de encontro entre t e C) terá discriminante nulo ($\Delta = 0$), de onde vem:

$$5x^2 - [4(b - 1) + 6]x + [(b - 1)^2 - 11] = 0, \text{ com } \Delta = 0$$

$$[4(b - 1) + 6]^2 - 4 \cdot 5 \cdot [(b - 1)^2 - 11] = 0$$

$$(b - 1)^2 - 12(b - 1) - 64 = 0$$

$$b = 17 \text{ ou } b = -3 \quad (4)$$

De (3) e (4) vem: $b = -3 \Rightarrow y = -2x - 3$ é uma equação para t . (Nota-se que o problema pode terminar por aqui, pois o enunciado pede uma equação, e não todas as equações possíveis).

$$2^a) m_t = \frac{1}{2}$$

Procedendo de forma análoga à primeira parte, obtemos:

$$\begin{cases} |b| = \frac{3}{2} \\ (b - 1)^2 + 3(b - 1) - \frac{91}{4} = 0 \end{cases}$$

o que representa um sistema sem solução.

Desta forma a única reta t possível é a de equação $y + 2x + 3 = 0$.

29. Considere as n retas $r_i: y = m_i x + 10$, $i = 1, 2, \dots, n; n \geq 5$, em que os coeficientes m_i , em ordem crescente de i , formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 29

Como r_5 tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, então a equação $x^2 + (m_5 x + 10)^2 = 25$ (cujas soluções representam as abscissas da interseção entre a reta e a circunferência) tem discriminante nulo ($\Delta = 0$).

Reescrevendo a equação, temos: $(1 + m_5^2)x^2 + 20m_5 x + 75 = 0$, e assim, para $\Delta = 0$:

$$(20m_5)^2 - 4 \cdot (1 + m_5^2) \cdot 75 = 0 \Rightarrow m_5^2 = 3$$

Como $m_1 = 0$ e $q > 0$, temos que $m_5 > 0 \Rightarrow m_5 = \sqrt{3}$.

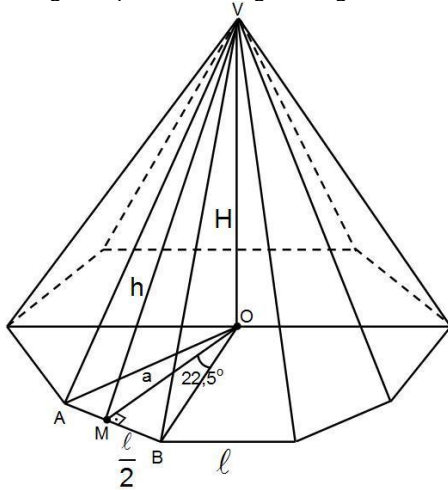
Além disso, $m_5 = m_1 + 4q = 4q$

$$\therefore q = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

30. A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 30

Vamos usar a seguinte pirâmide octogonal regular como referência:



O volume solicitado é $V_{\text{PIRÂMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$, onde A_B é a área do octógono que forma a base da pirâmide e H a altura da pirâmide.

Por hipótese, $\frac{A_L}{A_B} = \sqrt{5} \Rightarrow A_L = \sqrt{5} A_B$ (I);

A área lateral é 8 vezes a área do triângulo que forma a face lateral. Assim, $A_L = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = 4 \cdot l \cdot h$, onde l é o lado do octógono da base e h é a altura desse triângulo.

A área da base é a área do octógono, que é 8 vezes a área do triângulo ABO , da figura.

Assim, $A_B = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot a = 4a \cdot l$ (II);

Portanto, $4 \cdot l \cdot h = \sqrt{5} \cdot 4 \cdot a \cdot l \Rightarrow h = \sqrt{5} \cdot a$ (III);

Usando Pitágoras no triângulo VOM , temos:

$h^2 = H^2 + a^2 \Rightarrow H^2 = h^2 - a^2$. Substituindo (III) no resultado encontrado, vem:

$$H^2 = 4a^2 \Rightarrow H = 2a \text{ (IV);}$$

Para calcular a área da base usamos o ângulo \widehat{MOB} , dado por:

$$\widehat{MOB} = \frac{360^\circ}{8} = 22,5^\circ$$

No triângulo MOB , temos: $\text{tg} 22,5^\circ = \frac{1}{2a}$.

Sabendo que $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$, temos que:

$$\text{tg} 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}}$$

$$\text{Logo, } \text{tg} 22,5^\circ = \sqrt{\frac{((\sqrt{2})^2 - \sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{2} - 1)^2}{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Com isso, temos:

$$l = 2a \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ (V).}$$

Portanto:

$$V_{\text{PIRÂMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 2a \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot 2a = \frac{16}{3} a^3 (\sqrt{2} - 1).$$



Fone : **3013-5400**
www.ELITECURITIBA.com.br