

O ELITE CURITIBA aprova mais porque tem qualidade, seriedade e profissionalismo como lemas.
Confira nossos resultados e comprove porque temos mais a oferecer.

ITA 2007

Os **2 únicos** aprovados no PARANÁ
CAMILA SARDETO DEOLINDO
VITOR A. CARLESSE MARTINS



ITA 2006

Os **3 únicos** aprovados de Curitiba
GABRIEL KENDJY KOIKE
RICARDO I. S. TOMINAGA
YVES CONSELVAN

ITA 2005

2 dos 3 únicos aprovados no PARANÁ
FELLIPE CARVALHO
EDUARDO LEITNER

IME 2008

CACFG ATIVA:

JULIANO AUGUSTO DE BONFIM GRIPP -
1° LUGAR GERAL DO PR (50° do Brasil)
SÉRGIO JOÃO BUFFON JR - 2° LUGAR
DO PR (56° do Brasil)
LUCAS BRIANEZ FONTOURA - 3° LUGAR
DO PR (61° do Brasil)
YASSER ARAFAT DE BELÉM
FIGUEIREDO - 5° LUGAR DO PR (89° do
Brasil)

CACFG RESERVA:

MAURÍCIO FLÁVIO DOMPSIN DE MORAES - 2° LUGAR DO PR
(68° do Brasil)
RODOLFO UDO LABSCH - 4° LUGAR DO PR
FÁBIO BECK WANDERER - 6° LUGAR DO PR
LEONARDO AUGUSTO SEKI - 8° LUGAR DO PR
RAFAEL THOFEHRN CASTRO - 9° LUGAR DO PR
ALLISON FAUAT SCHRAIER - 10° LUGAR DO PR



IME 2007

11 dos **16** aprovados no PARANÁ, incluindo os **4** melhores da **ativa** e os **4** melhores da **reserva**.

CACFG/Reserva

1° Lugar do Paraná (**9° do Brasil**) : GUILHERME A. LOURENÇO PEREIRA
Maiores notas do Paraná em Matemática (9,50) e Física (9,00).

2° Lugar do Paraná (**74° do Brasil**) : CAMILA S. DEOLINDO
Maior nota do Paraná em Química (8,30)

3° Lugar do Paraná (**83° do Brasil**) : RICARDO M. O. SILVA PINTO

4° Lugar do Paraná : MAURICIO FLÁVIO DOMPSIN DE MORAES

7° Lugar do Paraná : EDUARDO CROMACK LIPPMANN

CACFG/Ativa

1° Lugar do Paraná (**15° do Brasil**) : NORTON D. V. DE ASSIS
Maiores notas do Paraná em Química (8,30) e em Inglês (10,00).

2° Lugar do Paraná (**30° do Brasil**) : VITOR A. C. MARTINS

3° Lugar do Paraná (**43° do Brasil**) : ANDRÉ C. COSTA PINTO
Maiores notas do Paraná na objetiva (9,25) e em Inglês (10,00)

4° Lugar do Paraná (**84° do Brasil**) : SÉRGIO J. BUFFON JÚNIOR

7° Lugar do Paraná : JULIANO AUGUSTO DE BONFIM GRIPP

8° Lugar do Paraná : ALEXANDRE GOMES DA COSTA

IME 2006

Os **4 únicos** aprovados do PARANÁ
GABRIEL KENDJY KOIKE
FRANCIS HALLEY QUEIROZ SANT'ANNA

GUILHERME AUGUSTO LOURENÇO PEREIRA
OTTO CARLOS LIPPMANN

IME 2005

7 aprovados e os **3 ÚNICOS** convocados do Paraná
1° Lugar do Paraná (**6° do Brasil**): EDUARDO H. LEITNER
2° Lugar do Paraná: FELLIPE L. CARVALHO
3° Lugar do Paraná: SABRINA D. DIAS MANCIO

EPCAr – 2007: 3 dos 4 convocados do Paraná (3º Ano)

ENZO BERNARDES RIZZO (1° do Paraná)
CÉSAR BRITO DA SILVA
VINÍCIUS ORMIANIN ARANTES SOUSA

AFA 2008

1°s lugares do Paraná em todas as opções de carreira.



AVIAÇÃO:

JULIANO AUGUSTO DE BONFIM GRIPP
(1° do PR, **6° do Brasil**)
LUCAS BRIANEZ FONTOURA
(3° do PR, **17° do Brasil**)
YASSER ARAFAT BELÉM DE FIGUEIREDO (4° do PR)
MAURÍCIO FLÁVIO DOMPSIN DE MORAES (5° do PR)
LEONARDO AUGUSTO SEKI (6° do PR)
RAFAEL THOFEHRN CASTRO (7° do PR)
LUÍS FELIPE THOFEHRN CASTRO (8° do PR)

AVIAÇÃO (FEMININO) :

VANESSA HUNGRIA (2° do PR)

INTENDÊNCIA:

SÉRGIO JOÃO BUFFON JÚNIOR (1° do PR, **18° do Brasil**)
ALLISON FAUAT SCHRAIER (3° do PR)
DANIEL FREITAS DE LIMA (6° do PR)

INFANTARIA:

FÁBIO BECK WANDERER (1° do PR, **17° do Brasil**)
BRUNO CASAS DO NASCIMENTO (2° do PR)

AFA 2007 10 dos 14 convocados do Paraná

1° LUGAR GERAL DO BRASIL EM AVIAÇÃO: GUILHERME AUGUSTO LOURENÇO PEREIRA.

1° do Paraná (**3° do Brasil**) em **Infantaria:**
ANDRÉ C. COSTA PINTO

1° do Paraná (**22° do Brasil**) em **Intendência:**
SÉRGIO JOÃO BUFFON JÚNIOR

AFA 2006

11 dos **18** convocados do Paraná são do **ELITE CURITIBA** incluindo:

1° Lugar do Paraná (**6° do Brasil**) em **Aviação:**
GABRIEL K. KOIKE

1° Lugar do Paraná (e **9° do Brasil**) em **Intendência:**
CLÁUDIA L. ADÃO



Fone:(41) **3013-5400**
www.ELITECURITIBA.com.br

Questão 01

Considere uma população de igual número de homens e de mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

- a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{4}$

Solução: Alternativa A

Homens daltônicos: $P(H \cap D) = \frac{1}{2} \cdot 0,05$

Mulheres daltônicas: $P(M \cap D) = \frac{1}{2} \cdot 0,0025$

Probabilidade de uma pessoa da população ser daltônica:

$P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = \frac{1}{2} \cdot 0,0525$

Probabilidade de ser mulher dado que a pessoa é daltônica:

$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{1/2 \cdot 0,0025}{1/2 \cdot 0,0525} = \frac{1}{21}$

Questão 02

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a:

- a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

Solução: Alternativa B

Como $|\alpha| = |\beta| = 1$, então podemos escrever α e β na forma

trigonométrica como: $\alpha = \cos \theta_1 + i \cdot \text{sen} \theta_1$
 $\beta = \cos \theta_2 + i \cdot \text{sen} \theta_2$

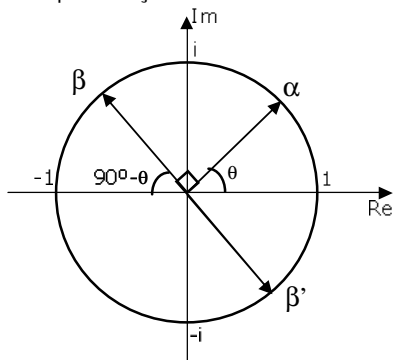
Como $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$, então:

$|\alpha - \beta| = |\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen} \theta_1 - (\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen} \theta_2)| = \sqrt{2} \Rightarrow$
 $|(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + i(\text{sen} \theta_1 - \text{sen} \theta_2)|^2 = (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\text{sen} \theta_1 - \text{sen} \theta_2)^2$
 $= \cos^2 \theta_1 + \text{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \text{sen}^2 \theta_2 - 2 \cdot (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2) =$
 $= 1 + 1 - 2 \cdot (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2) = 2$

Logo $(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2) = 0$, ou seja, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

Daí segue que $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para determinado α e dois possíveis valores para β (onde $\beta = -\beta'$) conforme ilustrado na figura a seguir no plano de Argand-Gauss, temos a seguinte representação:



Da figura, temos:

$\alpha^2 + (\pm\beta)^2 = [\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta]^2 + [-\cos(90^\circ - \theta) + i \cdot \text{sen}(90^\circ - \theta)]^2$
Como $\cos(90^\circ - \theta) = \text{sen} \theta$ e $\text{sen}(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, então:
 $\alpha^2 + \beta^2 = [\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta]^2 + [-\text{sen} \theta + i \cdot \cos \theta]^2 =$
 $(\cos^2 \theta + 2i \text{sen} \theta \cos \theta - \text{sen}^2 \theta) + (\text{sen}^2 \theta - 2i \text{sen} \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) = 0$

Questão 03

Considere o sistema $Ax = b$, em que:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T - S é:

- a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

Solução: Alternativa A

Escalonando o sistema em pauta:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k-3)z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ (k+4)y = 4 \\ y + kz = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3z - 2y = 1 \\ kz + y = 1 \\ (k+4)y = 4 \end{cases}$$

Da última equação temos que $y = \frac{4}{k+4}$.

Assim se $k = -4$ o sistema é impossível.

Para $k \neq -4$ a segunda e a terceira equações e equivalem e o sistema é possível e indeterminado.

Então, se $k \neq -4$ e $k \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

Logo $T = -4$ e $S = 0$ e $T - S = -4$

Questão 04

Sejam A e C matrizes n x n inversíveis que $\det(A + C^{-1}A) = \frac{1}{3}$ e

$\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-3} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

- a) 3^n b) $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) $5 \cdot 3^{n-1}$

Solução: Alternativa D

$\det B = \det [3(A^{-1} + C^{-1})^T] = 3^n \det(A^{-1} + C^{-1})$

Para obtermos $\det(A^{-1} + C^{-1})$, utilizamos a outra informação do enunciado:

$\det(A + C^{-1}A) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det(A^{-1}A + C^{-1}A) = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\det[(A^{-1} + C^{-1})A] = \frac{1}{3}$

$\det(A^{-1} + C^{-1}) \cdot \det A = \frac{1}{3} \Rightarrow \det(A^{-1} \cdot C^{-1}) = \frac{1}{15}$

Assim: $\det B = 3^n \cdot \frac{1}{15} = \frac{3^{n-1}}{5}$

Questão 05

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de um menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 63, então o de maior grau tem grau igual a:

- a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

Solução: Alternativa B

$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) \cdot P_4(x) \cdot P_5(x)$

Seja ∂P_i o grau de P_i e $\partial P_i > \partial P_j$ para $i > j$, logo $\partial P_1 = 2$.

$\partial P = \sum_{i=1}^5 \partial P_i = 2 + 2R + 2R^2 + 2R^3 + 2R^4 = 62 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^4 + R^3 + R^2 + R = 30 \cdot (1)$

$R = 2$ é solução de (1) e como $R \in \mathbb{N}$, para $R \geq 3$ temos

$R^4 + R^3 + R^2 + R > 30$.

Por tanto $\partial P_5 = 2 \cdot 2^4 = 32$

Questão 06

Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a:

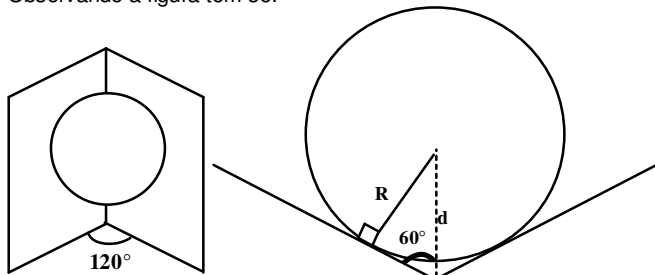
- a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

Solução: Alternativa E

Cálculo do raio da esfera:

$$V = (4/3)\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi \rightarrow R^3 = 3\sqrt{3}$$

Observando a figura tem-se:



$$\text{sen}60^\circ = R/d \rightarrow d = 2R/\sqrt{3} \rightarrow d = 2 \text{ cm}$$

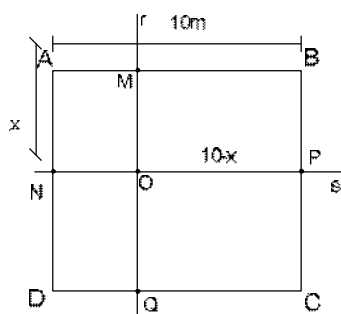
Questão 07

Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado \overline{AB} e N um ponto sobre o lado \overline{AD} , equidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado \overline{AD} e por N uma reta s paralela ao lado \overline{AB} , que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a intersecção de s com o lado \overline{BC} e Q é a intersecção de r com o lado \overline{DC} . Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

- a) $15 + 5\sqrt{5}$ b) $10 + 5\sqrt{5}$ c) $10 - \sqrt{5}$
 d) $15 - 5\sqrt{5}$ e) $10 - 3\sqrt{5}$

Solução: Alternativa D

Designando \overline{AM} por x



Sabemos que as áreas são:

$$\begin{aligned} \cdot S_{AMON} &= x^2 \\ \cdot S_{OPCQ} &= (10-x)^2 \\ \cdot S_{ABCD} &= 10^2 = 100 \end{aligned}$$

Foi dito que:
 $(x^2, (10-x)^2; 100) \Rightarrow \text{PG}$
 $(10-x)^4 = 100x^2$
 $(10-x)^2 = \pm 10x$

I. $100 - 20x + x^2 = 10x \therefore x^2 - 30x + 100 = 0$
 $\therefore \Delta = 900 - 400 = 500$

$$\therefore X = \frac{30 \pm 10\sqrt{5}}{2} \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 15 - 5\sqrt{5} \\ x_2 &= 15 + 5\sqrt{5} \text{ (não convém pois } x < 10) \end{aligned} \right.$$

II. $x^2 - 20x + 100 = -10x$

$$\therefore x^2 - 10x + 100 = 0$$

$$\Delta = 100 - 400 = -300 \Rightarrow \nexists N \in R$$

Logo $\overline{AM} = x = 15 - 5\sqrt{5}$

Questão 08

Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a

- a) -25 b) -27 c) -36 d) -39 e) -40

Solução: Alternativa A

Uma das raízes é $x = -1$, logo:

$$-a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0 \text{ (i)}$$

Além disso, $a_4 = 1/2$ e os coeficientes formam uma P.A, logo:

$$\text{P.A: } \left(\frac{1}{2} - 3 \cdot r, \frac{1}{2} - 2 \cdot r, \frac{1}{2} - r, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r \right) \text{ (ii)}$$

De (ii) em (i), temos:

$$-\left(\frac{1}{2} + r\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - r\right) + \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot r\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \cdot r\right) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Logo, P.A: $\left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $p(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

Então: $p(-2) = (-2)^5 + \frac{1}{2}(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 1 = -25$

Questão 09

Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o Máximo de a, b, c é igual a:

- a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Alternativa C

Seja $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, e λ_1 e λ_2 as duas raízes inteiras da equação polinomial $p(x) = 0$.

Como o polinômio tem coeficientes reais, se $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ é raiz, então

$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ também será raiz.

Pelas relações de Girard, o produto das quatro raízes vale:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Como essas duas raízes são inteiras, temos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, as quatro raízes do polinômio são $1, -1, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ e $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, e sua fatoração correspondente é:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) = \\ &= 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ p(x) &= 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Identificando os coeficientes, temos:

$$a = -2; b = -1 \text{ e } c = 2$$

Assim o valor máximo destes coeficientes é 2.

Questão 10

É dada a equação polinomial

$$(a + c + 2)x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$$

Com a, b, c reais, sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a:

- a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

Solução: Alternativa E

Sendo 1 raiz temos:

$$(a + c + 2)1^3 + (b + 3c + 1)1^2 + (c - a)1 + (a + b + 4) = 0$$

$$a + 2b + 5c + 7 = 0 \text{ (I)}$$

Como a equação recíproca é de primeira espécie e grau ímpar, então -1 também é raiz da equação:

$$(a + c + 2)(-1)^3 + (b + 3c + 1)(-1)^2 + (c - a)(-1) + (a + b + 4) = 0$$

$$a + 2b + c + 3 = 0 \text{ (II)}$$

Além disso, os coeficientes equidistantes dos extremos devem ser iguais. Logo:

$$a + c + 2 = a + b + 4 \rightarrow b - c = -2 \text{ (III)}$$

$$b + 3c + 1 = c - a \rightarrow a + b + 2c = -1 \text{ (IV)}$$

Temos 4 equações, mais do que o necessário para achar as 3 incógnitas.

Subtraindo II de I temos:

$$4c + 4 = 0 \rightarrow c = -1$$

Substituindo em III:

$$b - 2 - 1 = -3$$

Substituindo em IV:

$$a = -1 - (-3) - 2(-1) = 4$$

$$\text{Logo } a \cdot b \cdot c = 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 12$$

Questão 11

Seja $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcosseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arctangente, assinale o valor de:

$$\cos\left(\arcsen\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$$

- a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Solução: Alternativa B

Sejam: $\alpha = \arcsen\frac{3}{5}$ e $\beta = \arccos\frac{4}{5}$

Pela definição temos: $\sen\alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos\beta = \frac{4}{5}$

Seja assim: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\sen\beta = \frac{3}{5}$ Portanto: $\alpha = \beta$ Logo:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{25}$$

Questão 12

Dada a cônica $\lambda: x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular a λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

- a) $y = \sqrt{3}(x-1)$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$
d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x-7)$ e) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Solução: Alternativa E

Utilizando o conceito de derivada parcial, que nos dará o coeficiente angular da reta tangente à curva λ (no caso, a hipérbole):

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 2x - 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = x/y$$

A reta perpendicular a λ , é perpendicular à sua tangente no ponto

$$P(2, \sqrt{3}), \text{ portanto: } m = -\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}, \text{ sendo } m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Equação da reta: } y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$$

Questão 13

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2 \sen^2(3x) + \sen(6x) - 1$ são, respectivamente,

- a) $[-3,3]$ e 2π b) $[-2,2]$ e $\frac{2\pi}{3}$ c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$
d) $[-1,3]$ e $\frac{\pi}{3}$ e) $[-1,3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

Solução: Alternativa C

Dada a função:

$$f(x) = 2 \sen^2(3x) + \sen(6x) - 1$$

$$\text{Fazendo } 2\sen^2(3x) - 1 = \cos(6x)$$

$$\text{Tem-se: } f(x) = \sen(6x) + \cos(6x)$$

Transformando a soma em produto

$$f(x) = 2\sen(\pi/4) \cdot \cos(6x - \pi/4) \Rightarrow f(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(6x - \pi/4)$$

$$\text{Daí: Im} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\text{Período} = \frac{\pi}{3}$$

Questão 14

Para $X \in \mathbb{R}$, o conjunto solução $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é:

- a) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$
b) $\{0, 1, \log_5(2 + \sqrt{5})\}$

$$c) \left\{0, \frac{1}{2} \log_2 2, \frac{1}{2} \log_2 3, \log_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

$$d) \{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$$

e) A única solução é $x = 0$.

Solução: Alternativa D

Temos:

$$|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$$

$$|(5^x)^3 - (5^x)^2 \cdot 5 + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$$

Tomando $5^x = a$, temos:

$$|a^3 - 5a^2 + 4a| = |a - 1|$$

$$|a(a^2 - 5a + 4)| = |a - 1|$$

$$|a(a-1)(a-4)| = |a-1|$$

$$|a| \cdot |(a-4)| \cdot |a-1| = |a-1|$$

$$|a-1| \cdot (|a| \cdot |(a-4)| - 1) = 0$$

$$\Rightarrow |a-1| = 0 \text{ ou } |a| \cdot |(a-4)| = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ ou } a^2 - 4a = \pm 1$$

$$\Rightarrow a = 1, a^2 - 4a - 1 = 0 \text{ ou } a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, a = 2 \pm \sqrt{5} \text{ ou } a = 2 \pm \sqrt{3}$$

Como $a = 5^x$, temos:

$$5^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$5^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \log_5(2 + \sqrt{5})$$

$$5^x = 2 - \sqrt{5} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}; 5^x = 2 - \sqrt{5}, \text{ pois } 2 - \sqrt{5} < 0$$

$$5^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_5(2 + \sqrt{3})$$

$$5^x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_5(2 - \sqrt{3})$$

Questão 15

Um subconjunto D de \mathbb{R} tal que a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ é injetora, é dado por

- a) \mathbb{R} b) $(-\infty, 1]$ c) $[0, 1/2]$ d) $(0, 1)$ e) $[1/2, \infty)$

Solução: Alternativa C

Se a função f dada seja injetora, $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Os conjuntos D possíveis são tais que:

$$1^\circ \text{ Caso: } \ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 & \text{(i)} \\ \text{ou} \\ x \geq 1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ Caso: } \ln(x^2 - x + 1) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \leq 1 \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Porém, neste segundo caso, a função $g(x) = x^2 - x + 1$ não é injetora no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Para que $g(x)$ seja injetora, tomando $f(x)$ também injetora, pode-se dividir o intervalo pelo x_v da função $g(x)$:

$$x_v = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim: } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ (iii) ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ (iv). Na verdade, se } D$$

for qualquer subconjunto dos intervalos (i), (ii), (iii) ou (iv), a função f será injetora.

Questão 16

A soma de todas as soluções distintas da equação

$\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0$, que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a:

- a) 2π b) $\frac{23}{12}\pi$ c) $\frac{9}{6}\pi$ d) $\frac{7}{6}\pi$ e) $\frac{13}{12}\pi$

Solução: Alternativa E

Reescrevendo a equação $\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0$ como $\cos 3x + \cos 9x + 2 \cos 6x = 0$ e aplicando transformação em produto para a soma $\cos 9x + \cos 3x$, temos:

$$\cos 9x + \cos 3x = 2 \cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right) = 2 \cos 6x \cdot \cos 3x$$

Assim, a equação se torna:

$$2 \cos 6x \cdot \cos 3x + 2 \cos 6x = 0 \Rightarrow 2 \cos 6x (\cos 3x + 1) = 0$$

Logo, $\cos 6x = 0$ (i) ou $\cos 3x = -1$ (ii).

(i) Para $\cos 6x = 0 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

Como x está no primeiro quadrante, temos:

$$x = \frac{\pi}{12}; x = \frac{3\pi}{12}; x = \frac{5\pi}{12}; x = \frac{7\pi}{12}$$

(ii) Para $\cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Como x está no primeiro quadrante $x = \frac{\pi}{3}$;

Logo, a soma pedida é $\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$.

Questão 17

Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjunto de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

- a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$ d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

Solução: Alternativa A

De acordo com o enunciado:

$$H = \{\{1;2\}, \{1;3\}, \dots, \{1;365\}, \{2;3\}, \{2;4\}, \dots, \{2;365\}, \dots, \{364;365\}\}$$

O conjunto C dos possíveis elementos B é:

$$C = \{\{1;182\}, \{2;181\}, \{3;180\}, \dots, \{91;92\}\}$$

Seja $n(H)$ o número de elementos de H e $n(C)$ o número de elementos C (o total de elementos B que atendem à propriedade). Então:

$$P = \frac{n(C)}{n(H)} = \frac{91}{C_{365}^2} = \frac{91}{\frac{365 \cdot 364}{2}} = \frac{91}{365 \cdot 182} = \frac{1}{730}$$

Questão 18

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, \hat{BAC} , mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $\hat{ACE} = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} , tome o ponto D tal que $\hat{DBC} = 35^\circ$

Então, o ângulo \hat{EDC} vale:

- a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

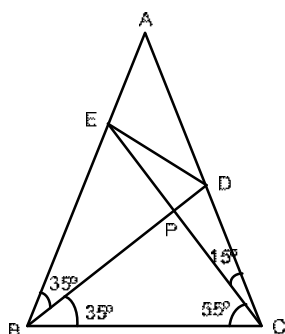
Solução: Alternativa D

A figura descrita é dada a seguir:

O ângulo \hat{CPD} é dado por:

$$\hat{BPC} = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$$

portanto, temos $\hat{BEP} = 55^\circ$.

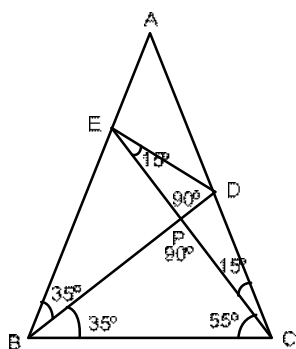


Sendo assim, o triângulo CBE é isósceles. Como $\overline{EP} = \overline{PC}$, então, por semelhança lado-ângulo-lado, os triângulos EPD e CPD são semelhantes.

Sendo assim o ângulo pedido é:

$$\hat{EDB} = \hat{EDP} = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{EDB} = 75^\circ$$



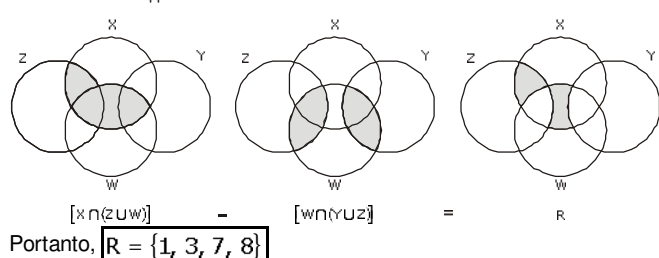
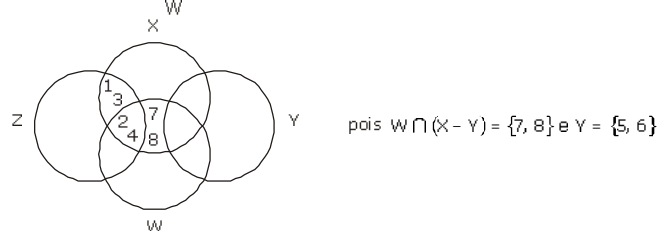
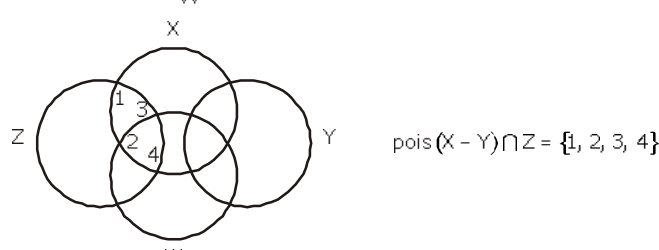
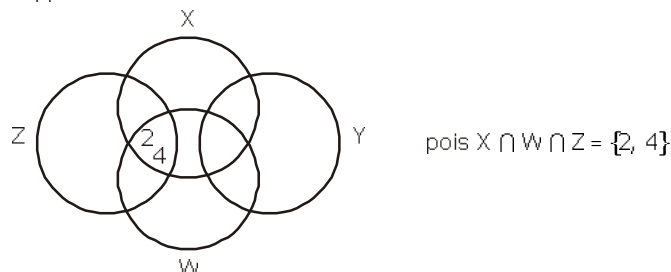
Questão 19

Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de \mathbb{N} tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a:

- a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ c) $\{1, 3, 7, 8\}$
d) $\{1, 3\}$ e) $\{7, 8\}$

Solução: Alternativa C

As relações de união e interseção entre os quatro conjuntos podem ser visualizados através de quatro diagramas circulares, pois $Z \cap Y = \emptyset$.



Questão 20

Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r . As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm , do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s , são iguais a:

- a) $175 \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$ b) $175 \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$ c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$
d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$ e) 700 e $10\sqrt{21}$

Solução: Alternativa B

Da figura:

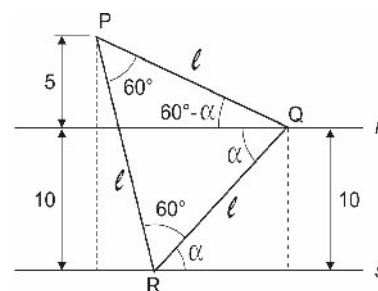
$$\text{sen} \alpha = 10/l \quad (i)$$

$$\text{sen}(60^\circ - \alpha) = 5/l \quad (ii)$$

Desenvolvendo (ii), tem-se:
 $\text{sen} 60^\circ \cdot \text{cos} \alpha - \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} 60^\circ = 5/l \rightarrow$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{cos} \alpha - \text{sen} \alpha \cdot \frac{1}{2} = 5/l$$

$$\rightarrow \sqrt{3} \cdot \text{cos} \alpha - \text{sen} \alpha = 10/l$$



$$\rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos \alpha = 2 \sin \alpha \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \alpha$$

Da equação fundamental da trigonometria: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

substituindo $\cos \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Voltando à eq.1 encontramos:

$$\sin \alpha = 10/\ell \rightarrow \frac{\sqrt{21}}{7} = 10/\ell \rightarrow \ell = \frac{10\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{Assim: } A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{175\sqrt{3}}{3}$$

$$2p = 3\ell = 10\sqrt{21}$$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

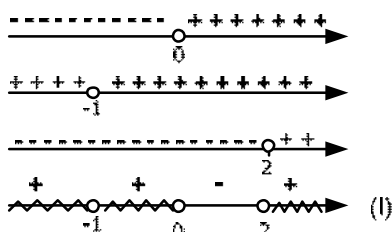
Questão 21

Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} ; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

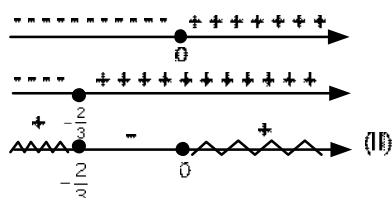
Solução :

Temos: $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x < x^4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 2x > 0$

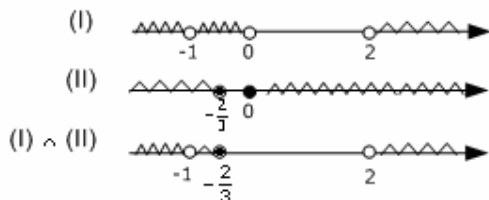
O polinômio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ tem como raízes -1 (raiz dupla), 0 e 2. Queremos $P(x) > 0$, ou seja, $x(x+1)^2(x-2) > 0$. Assim, segue:



Mas temos ainda que $3x^2 + 2x \geq 0$, ou seja, $x(3x+2) \geq 0$. Daí vem:



De (I) e (II), vem:



Logo, o conjunto solução é dado por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq -1 \right\}$$

Questão 22

Determine as raízes em \mathbb{C} de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a $S = \{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z+2| < 3\}$.

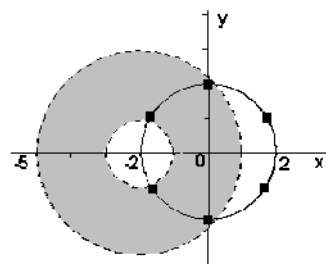
Solução:

$$4z^6 + 256 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-64}$$

$$\Rightarrow V = \left\{ 2\text{cis} \frac{\pi}{6}; 2\text{cis} \frac{\pi}{2}; 2\text{cis} \frac{5\pi}{6}; 2\text{cis} \frac{7\pi}{6}; 2\text{cis} \frac{3\pi}{2}; 2\text{cis} \frac{11\pi}{6} \right\}$$

A região limitada pela inequação $1 < |z+2| < 3$ é a coroa circular (ver figura) de raios 3 e 1 e centro no ponto (-2, 0). Assim, as únicas duas raízes da equação que não pertencem à região hachurada são

$$2\text{cis} \frac{\pi}{6} \text{ e } 2\text{cis} \frac{11\pi}{6}. \text{Então: } S \cap V = \{ \pm 2i ; -\sqrt{3} \pm i \}$$



Questão 23

Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

Solução :

Substituindo o x por $-x$ na equação acima, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = f(x) \\ h(-x) + g(-x) = f(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(x) + g(x) = f(x) \\ h(x) - g(x) = f(-x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$\text{Assim: } h(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) + \ln(x^2 - x + 1)}{2} = \frac{\ln((x^2 + 1)^2 - x^2)}{2} \Rightarrow$$

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln(x^4 + x^2 + 1)$$

$$g(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^2 - x + 1)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)$$

Questão 24

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$$

Encontre todos os valores de α, β, γ de modo que $x=0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Solução :

Como 0 é raiz tripla de P , temos que $p(x) = x^3 \cdot q(x)$, $q \in \mathbb{R}[x]$.

Logo é necessário e suficiente que:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & (i) \\ \beta + \gamma = 1 & (ii) \end{cases}$$

Além do coeficiente do termo em x^3 não ser nulo

$$\alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow \beta \neq -2\gamma \text{ (iii)}$$

Substituindo (iii) em (ii): $\gamma \neq -1$

A resposta é $\alpha = 0, \beta = 1 - \gamma, \text{ com } \gamma \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Questão 25

Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Solução:

De $A^{-1} = A^t$, temos: $A^t \cdot A = I$

Como A é simétrica, temos $A^t = A$. Logo: $A^2 = I$. (*)

Além disso, por ser A simétrica ela é da forma: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

A partir de (*):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + bc = 0 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b(a + c) = 0 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação: $b = 0$ ou $a + c = 0$

Se $b = 0$, então $a = \pm 1$ e $c = \pm 1$.

Se $a + c = 0$, ou seja, $a = -c$,

Dado que $a^2 = 1 - b^2$, temos: $a = \pm\sqrt{1 - b^2}$.

Portanto: $c = \mp\sqrt{1 - b^2}$. Sendo assim: $A = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1 - b^2} & b \\ b & \mp\sqrt{1 - b^2} \end{bmatrix}$,

com $b \in [-1, 1]$, ou $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Questão 26

Determine todos os valores $\alpha \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt{4}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0 \text{ admita raízes reais simples.}$$

Solução :

Para que a equação em x tenha apenas raízes reais simples é necessário e suficiente que a equação em y

$$y^2 - 2\sqrt{4}y + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

Tenha duas raízes reais positivas distintas. A condição para raízes reais distintas é

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}.$$

Além disso, a menor raiz deve ser positiva, ou seja,

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}.$$

Assim, o conjunto de todos os valores de α pedidos é $\left] 0, \frac{\pi}{3} \right[$.

Questão 27

Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos A, B e C tais que: $P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$.

Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P(C|A \cap B^c)$.

Solução :

$$P(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Sendo eventos independentes: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$$i) P(C|A \cap B) = \frac{p(A \cap B \cap C)}{p(A) \cdot p(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

ii) Dado que: $p((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \frac{3}{10}$ e sendo

$$p((A \cap B) \cup (A \cap C)) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C)$$

$$\text{Então, } \frac{3}{10} = p(A) \cdot p(B) + p(A \cap C) - \frac{1}{16} \rightarrow p(A \cap C) = \frac{3}{10} - p(A) \cdot p(B) +$$

$$\frac{1}{16} \rightarrow p(A \cap C) = \frac{3}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \rightarrow p(A \cap C) = \frac{9}{80}$$

$$p(A \cap C) = p(A \cap B^c \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{80} = p(A \cap B^c \cap C) + \frac{1}{16} \Rightarrow p(A \cap B^c \cap C) = \frac{1}{20}$$

$$p(A \cap B^c) = p(A) \cdot p(B^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Então: } P(C|A \cap B^c) = \frac{p(A \cap B^c \cap C)}{p(A \cap B^c)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

Questão 28

Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que \overline{AB} mede $2\sqrt{5}$ e \overline{BC} mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

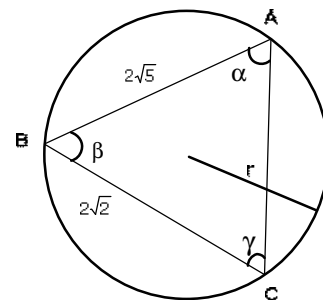
Solução :

Pela lei dos senos temos:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \operatorname{sen}\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$



$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}[180^\circ - (\alpha + \gamma)] = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) = \operatorname{sen}\alpha \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma \cos\alpha$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{4}{5}, \text{ pois}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} \text{ e } \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}.$$

$$\text{Assim, segue: } \operatorname{sen}\beta = \frac{3\sqrt{10}}{50} + \frac{12\sqrt{10}}{50} = \frac{15\sqrt{10}}{50} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

A área do ΔABC é dada por:

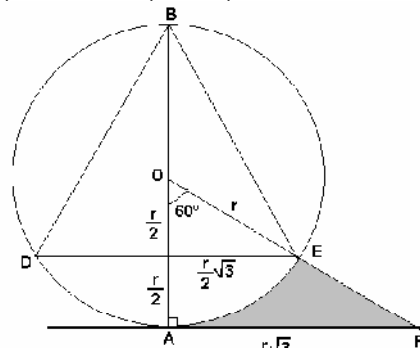
$$\Delta_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}}{10} = 6 \text{ u.a.}$$

Questão 29

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e \overline{AB} um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco \widehat{AE} e pelos segmentos \overline{AF} e \overline{EF} em torno do diâmetro \overline{AB} .

Solução :

A figura em questão é dada pelo esquema abaixo:



A rotação de AEF em torno do eixo AB gera um sólido cujo volume é dado pela retirada de uma calota esférica (altura $r/2$ e raio da seção $r\sqrt{3}/2$), de um tronco de cone (altura $r/2$ e raios de base $r\sqrt{3}/2$ e $r\sqrt{3}$).

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{h}{3} (S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}) \Rightarrow$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{r}{6} \left(3\pi r^2 + \frac{3\pi r^2}{4} + \sqrt{3\pi r^2 \cdot \frac{3\pi r^2}{4}} \right) = \frac{21\pi r^3}{24}$$

$$V_{\text{CALOTA}} = \frac{\pi h}{6} (3R^2 + h^2) = \frac{\pi r}{12} \left[3 \left(\frac{r\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] = \frac{5\pi r^3}{24}$$

$$V_{\text{SÓLIDO}} = V_{\text{TRONCO}} - V_{\text{CALOTA}} = \frac{21\pi r^3}{24} - \frac{5\pi r^3}{24} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Questão 30

Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2,5), (-1,2) e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2,5).

Solução :

Como a, b e c estão em P.A., podemos escrever:

$$a = b - r, \quad c = b + r.$$

Substituindo então esses valores na equação da parábola, encontramos $y = (b - r)x^2 + bx + b + r$.

Como os pontos (2,5) e (-1,2) estão na parábola, temos:

$$\begin{cases} 4(b - r) + 2b + b + r = 5 \\ b - r - b + b + b + r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7b - 3r = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Assim, temos que $a = 2 - 3 = -1$ e $c = 2 + 3 = 5$. Desse modo, a parábola é $y = -x^2 + 2x + 5$.

Seja r a reta que tangente à parábola em (2,5). Usando a relação $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$r: y = m(x - 2) + 5$$

Igualando as equações da parábola e da reta:

$$m(x - 2) + 5 = -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow x^2 + (m - 2)x - 2m = 0$$

Como a reta é tangente, existe um único valor de x que deve satisfazer a equação do segundo grau acima, de modo que obrigatoriamente temos que o discriminante dessa equação deve ser zero. Assim:

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \pm \frac{\sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow m = -2$$

Logo, a reta tangente é $y + 2x - 9 = 0$.

O vértice da parábola é dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{-2}{-2}, \frac{-2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}{-4} \right) = (1, 6).$$

Aplicando finalmente a fórmula da distância de ponto à reta,

encontramos: $\text{distância} = \frac{|6 + 2 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$



3013-5400

www.ELITECURITIBA.com.br

Confira alguns resultados do Elite Curitiba:

ITA 2007: Os **2** únicos convocados do Paraná.

ITA 2006: Os **3** únicos convocados de Curitiba.

ITA 2005: **2** dos **3** convocados do Paraná.

IME 2008: 1º lugar do **geral do Paraná**, **11** dos **17** aprovados do Paraná, incluindo os melhores da ativa e da reserva.

IME 2007: 9º lugar do **Brasil** na reserva, **15º** lugar do **Brasil** na ativa e **11** dos **16** aprovados do Paraná, incluindo os **4** melhores da ativa e da reserva.

IME 2006: Os **4** únicos convocados do Paraná.

Escola Naval 2006: O único convocado do Paraná.

IME 2005: os **3** únicos convocados do Paraná.

AFA 2008: 1ºs lugares do Paraná em Aviação, Intendência e Infantaria e **13** convocados no total.

AFA 2007: 1º Lugar **Geral do Brasil** e **10** dos **14** convocados do Paraná.

AFA 2006: **11** dos **18** convocados do Paraná.

Venha fazer parte desta



“Preparação é tudo!”