

O **ELITE CURITIBA** aprova mais porque tem qualidade, seriedade e profissionalismo como lemas. Confira nossos resultados e comprove porque temos mais a oferecer.

ESPCEX

2008: 9 aprovados

GUILHERME PAPATOLO

CONCEIÇÃO

1º do Paraná e 9º do Brasil

BRUNO TRENTINI LOPES RIBEIRO

2º do Paraná e 32º do Brasil

2007: 9 alunos convocados no Paraná

2006: 9 alunos convocados no Paraná (turma de 20 alunos)

2005: 100% de aprovação!



AFA

2009: 15 aprovados entre os 20 do Paraná (incluindo os 3 primeiros lugares)
Leonardo Augusto Seki: 2º lugar nacional e 1º do Paraná

2008: 13 aprovados

1ºs lugares do Paraná em todas as opções de carreira

2007: 10 dos 14 convocados do Paraná

2006: 11 dos 18 convocados do PR, incluindo: 1º Lugar do Paraná (6º do Brasil) em Aviação
1º Lugar do Paraná (9º do Brasil) em Intendência



IME

2008: 10 aprovados (3 primeiros da Ativa, 5º da Ativa e 6 entre os 10 1ºs da Reserva)

2007: 11 dos 16 aprovados do Paraná, incluindo os 4 melhores da ativa e os 4 melhores da reserva

2006: Os 4 únicos aprovados do Paraná

2005: 7 aprovados e os 3 únicos convocados do Paraná



IITA

Por 4 anos consecutivos a maior aprovação do Paraná

2008: 3 dos 4 aprovados do Paraná

2007: Os 2 únicos aprovados do PR

2006: Os 3 únicos aprovados de Curitiba

2005: 2 dos 3 aprovados do Paraná



EPCAR

2007: 3 dos 4 convocados do Paraná

2006: 2 convocados

2005: 1º lugar do Paraná



EEAR

2008: 4 aprovações (2ºs lugares dos grupos 1 e 2)

2006: 2 convocados

Escola Naval

2008: 9 aprovados

2007: 70% de aprovação na 1ª fase

2005: 100% de aprovação!



UFPR

2008: 9 aprovados

2007: 70% de aprovação na 1ª fase

2006: 1º Lugar em Eng. Mecânica

2º Lugar em Eng. Eletrônica

2005: 1º Lugar Direito (matutino)

1º Lugar Relações Públicas

UFTPR

Inverno 2008:

1º, 2º e 4º lugares em Eng. Ind. Mecânica

1º e 2º lugares em Eng. Eletrônica / Eletrotécnica

1º lugar em Eng. de Computação

Verão 2008: 13 aprovados

2007: 11 aprovados em vários cursos

2006: 1º Lugar em Eng. Mecânica

2º Lugar em Eng. Eletrônica

2005: 85% de aprovação em

Engenharia, com 5 dos 8 1ºs colocados de Eng. Mecânica.



Só no **ELITE** você encontra:
Simulados semanais/quinzenais;
A maior carga horária.

Início das inscrições para o exame de bolsas:
4 / 1 / 2009
Realização do exame de bolsas:
5 / 2 / 2009



CURITIBA

Fone : **3013-5400**

www.ELITECURITIBA.com.br

03. Sabe-se que $z_1 \overline{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.

Obs.: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e \overline{z} é o número complexo conjugado de z .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 03

A equação $|z_3 - (-z_4)| = |z_3 - z_4|$ indica que:

- 1º) z_3 equidista de z_4 e de $-z_4$;
- 2º) z_3 pertence à mediatriz do segmento de extremos z_4 e $-z_4$;
- 3º) z_3 é ortogonal a z_4 ;
- 4º) $\frac{z_3}{z_4} = r \operatorname{cis}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$.

Portanto

$$z_1 \overline{z_2} = \frac{z_1 z_2 \overline{z_2}}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} |z_2|^2 = r \operatorname{cis}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{|z_2|^2} \operatorname{cis}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

z_1 é ortogonal a z_2 .

04. Dada a função $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, com as seguintes características:
 $F(0,0) = 1$;
 $F(n,m+1) = q \cdot F(n,m)$, onde q é um número real diferente de zero;
 $F(n+1, 0) = r + F(n,0)$, onde r é um número real diferente de zero.

Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009} F(i,i)$, $i \in \mathbb{N}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 04

De acordo com o enunciado, temos:

$$F(1,0) = r + F(0,0) = r + 1$$

$$F(2,0) = r + F(1,0) = 2r + 1$$

$$F(3,0) = r + F(2,0) = 3r + 1$$

Por indução, conclui-se que: $F(n,0) = n \cdot r + 1$ (1)

Por outro lado, temos:

$$F(1,1) = q \cdot F(1,0) = q \cdot (r + 1)$$

$$F(2,2) = q \cdot F(2,1) = q^2 \cdot F(2,0) = q^2 \cdot (2r + 1)$$

$$F(3,3) = q \cdot F(3,2) = q^3 \cdot F(3,1) = q^3 \cdot (3r + 1)$$

Novamente, por indução, conclui-se que: $F(n,n) = q^n \cdot (n \cdot r + 1)$

(2)

Denotemos por S , a soma desejada. Desta forma, temos:

$$S = \sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = 1 + q(r+1) + q^2(2r+1) + \dots + q^{2009}(2009r+1) \quad (3)$$

Multiplicando ambos os membros de (3) por q , temos:

$$qS = q + q^2(r+1) + q^3(2r+1) + \dots + q^{2010}(2009r+1) \quad (4)$$

Subtraindo a equação (4) da equação (3), temos:

$$S(1-q) = 1 + qr + q^2r + q^3r + \dots + q^{2009}r - q^{2010}(2009r+1) \quad (5)$$

Observando a equação (5), temos que:

$$qr + q^2r + q^3r + \dots + q^{2009}r = qr \cdot \frac{(q^{2009} - 1)}{q - 1} \quad (6)$$

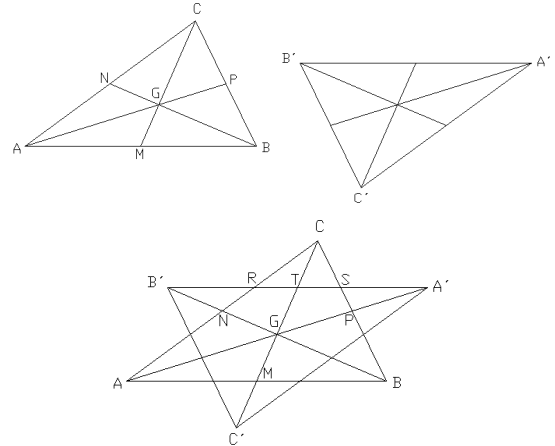
Substituindo (6) em (5), chega-se a:

$$S(1-q) = 1 - q^{2010}(2009r+1) + qr \cdot \frac{(q^{2009} - 1)}{q - 1}$$

Portanto: $S = \frac{q^{2010}(2009r+1) - 1}{q - 1} - qr \cdot \frac{(q^{2009} - 1)}{(q - 1)^2}$

05. Seja G o ponto de interseção das medianas de um triângulo ABC com área S . Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180° dos pontos A, B e C , respectivamente em torno de G . Determine, em função de S , a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 05

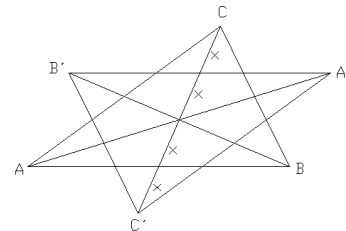


G é baricentro do ΔABC , logo $CG = 2MG$. Arbitrando $MG = x$, temos $CG = 2x$

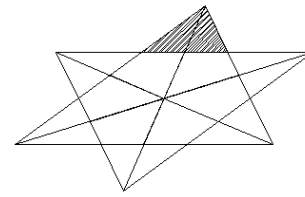
Com a rotação G também é baricentro do $\Delta A'B'C'$ e $C'G = 2x$, seguindo que $C'M = x$

Deste modo temos que os Δs ABG e $A'B'G$ são congruentes (LLL).

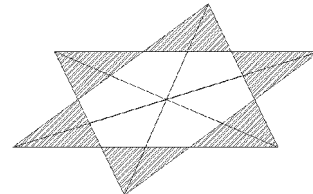
Como $G\hat{A}B = G\hat{A}'B'$ temos que $A'B'$ e AB são paralelos.



Assim $\Delta ABC \sim \Delta RSC$ e a razão de semelhança é $MC/TC = 3x/x = 3$. Então a área do ΔRSC é $(1/3)^2$ da área do ΔABC . $S_{\Delta RSC} = S/9$

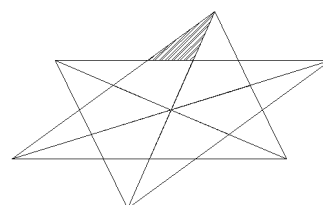


Por analogia, as áreas dos pequenos triângulos da figura também valem $S/9$. Portanto, a área total dos triângulos é $6 \cdot S/9 = 2S/3$

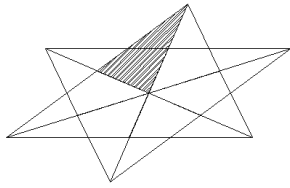


Da semelhança também percebemos que se M é médio de AB então T é médio de RS .

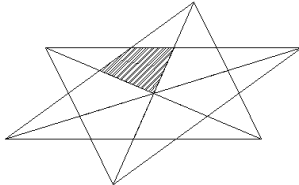
Assim $S_{\Delta RTC} = S_{\Delta TSC} = (S/9)/2 = S/18$.



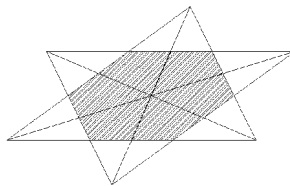
Voltando ao ΔABC , sabemos que $S_{\Delta CNG} = S/6$



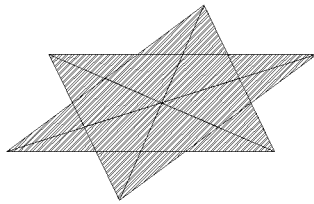
Deste modo $S_{GTRN} = S_{\Delta CNG} - S_{\Delta RTC} = S/6 - S/18 = 2S/18 = S/9$



Concluimos então, por analogia, que todas as áreas dos pequenos quadriláteros da figura também valem $S/9$. Logo, a área total dos quadriláteros vale $6 \cdot S/9 = 2S/3$



Então a área pedida vale $2S/3 + 2S/3 = 4S/3$.



06. Resolva a seguinte inequação, para $0 \leq x < 2\pi$:

$$\frac{3\text{sen}^2 x + 2\text{cos}^2 x + 4\text{sen}x - (1 + 4\sqrt{2})\text{sen}x \cos x + 4\text{cos}x - (2 + 2\sqrt{2})}{2\text{sen}x - 2\sqrt{2}\text{sen}x \cos x + 2\text{cos}x - \sqrt{2}} > 2$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 06

Rearranjando os termos do numerador, temos:

$$\frac{(3\text{sen}^2 x + 2\text{cos}^2 x - \text{sen}x \cos x - 2) + 2 \cdot (2\text{sen}x - 2\sqrt{2}\text{sen}x \cos x + 2\text{cos}x - \sqrt{2})}{2\text{sen}x - 2\sqrt{2}\text{sen}x \cos x + 2\text{cos}x - \sqrt{2}} > 2$$

Logo temos:

$$\frac{3\text{sen}^2 x + 2\text{cos}^2 x - \text{sen}x \cos x - 2}{2\text{sen}x - 2\sqrt{2}\text{sen}x \cos x + 2\text{cos}x - \sqrt{2}} + 2 > 2$$

$$\frac{3\text{sen}^2 x + 2\text{cos}^2 x - \text{sen}x \cos x - 2}{2\text{sen}x - 2\sqrt{2}\text{sen}x \cos x + 2\text{cos}x - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\text{sen}^2 x + 2 - \text{sen}x \cos x - 2}{2\text{sen}x(1 - \sqrt{2}\cos x) - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}\cos x)} > 0$$

$$\frac{\text{sen}x(\text{sen}x - \cos x)}{(2\text{sen}x - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}\cos x)} > 0$$

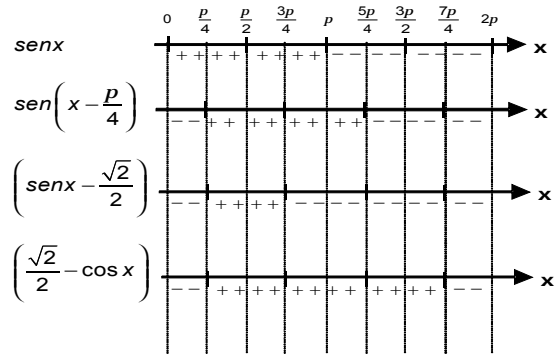
$$\frac{\text{sen}x \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \right)}{2\sqrt{2} \left(\text{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right)} > 0$$

$$\frac{\text{sen}x \cdot \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left(\text{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right)} > 0$$

Portanto,

$$\frac{\text{sen}x \cdot \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\left(\text{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right)} > 0$$

Analisando o sinal de $f(x) = \frac{\text{sen}x \cdot \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\left(\text{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right)}$



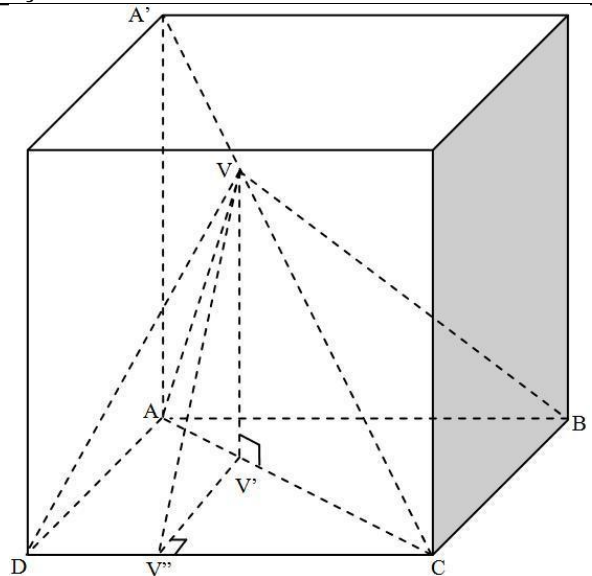
Assim conjunto de valores de x no qual $f(x)$ é positiva é:

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right[\right.$$

07. Seja um cubo de base ABCD com aresta a . No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide VABCD. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide VABCD, em função de a , sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2 sendo k um número primo.

Obs.: as arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 07



Sejam A, B, C, D e V os pontos descritos no enunciado, e ainda A', V' e V'' pontos auxiliares, conforme a figura.

V'' é, por construção, aquele que torna V''V' e DC perpendiculares.

Temos também que $VV' = h$.

Achemos os demais segmentos:

VC:

$$\Delta VV'C \sim \Delta A'AC \Rightarrow \frac{VV'}{A'A} = \frac{VC}{A'C} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{VC}{a\sqrt{3}} \Rightarrow VC = h\sqrt{3}$$

V'C:
 $(VV')^2 + (V'C)^2 = (VC)^2 \Rightarrow h^2 + (V'C)^2 = (h\sqrt{3})^2 \Rightarrow V'C = h\sqrt{2}$

VA:
 $(VA)^2 = (V'A)^2 + (VV')^2 \Rightarrow (VA)^2 = (a\sqrt{2} - h\sqrt{2})^2 + h^2$
 $\Rightarrow (VA)^2 = 2a^2 - 4ah + 3h^2$

V''C e V''V'':

Catetos de um Δ retângulo e isósceles de hipotenusa

$V'C = h\sqrt{2} \Rightarrow V''C = V'V'' = h$

VV'':

Hipotenusa de um Δ retângulo de catetos

$VV' = V'V'' = h \Rightarrow VV'' = h\sqrt{2}$

VD:

$(VD)^2 = (V''D)^2 + (VV'')^2 \Rightarrow (VD)^2 = (a-h)^2 + (h\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow (VD)^2 = a^2 - 2ah + 3h^2$

VB:

Pela simetria do problema é fácil ver que ele é igual a VD.

Agora achamos os valores possíveis de k, de acordo com o enunciado:

$(VA)^2 + (VB)^2 + (VC)^2 + (VD)^2 = ka^2$

$(2a^2 - 4ah + 3h^2) + (a^2 - 2ah + 3h^2) + (3h^2) + (a^2 - 2ah + 12h^2 - 8ah + a^2(4-k)) = 0$

$h = \frac{2a \pm a\sqrt{3k-8}}{6} \quad (i)$

Sabendo que k é primo, que $0 < h < a$ e que $3k - 8 \geq 0$ obtemos todos os valores possíveis para h:

$k = 3 \Rightarrow h = \frac{a}{2} \text{ ou } h = \frac{a}{6}$
 $k = 5 \Rightarrow h = \frac{a}{6} \cdot (2 + \sqrt{7})$
 $k = 7 \Rightarrow h = \frac{a}{6} \cdot (2 + \sqrt{13})$

08. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma

$a_{in} = -\binom{n}{n-i+1}$

- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Seja I a matriz identidade de ordem n e $\det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $\det(xI - A) = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 08

Do enunciado:

$$(xI - A)_{n \times n} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & 0 & \binom{n}{n-2} \\ & & & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x + \binom{n}{1} \end{bmatrix}$$

Então, aplicando Laplace na última coluna, temos:

$$\det(xI - A) = (-1)^{1+n} \cdot \binom{n}{n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ & \mathbf{M} & \mathbf{O} & x \end{vmatrix} + (-1)^{2+n} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x & \mathbf{L} \\ & \mathbf{M} & \mathbf{O} & x \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{2n} \cdot \left[x + \binom{n}{1} \right] \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x & \mathbf{L} \\ & \mathbf{M} & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$\det(xI - A) = (-1)^{1+n} \cdot \binom{n}{n} \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^{2+n} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot x^{i-1} \cdot (-1)^{n-i} + \dots + (-1)^{2n} \cdot \left[x + \binom{n}{1} \right] \cdot x^{n-1}$

$\det(xI - A) = 1 + \binom{n}{n-i+1} \cdot x^{i-1} + \dots + n \cdot x^{n-1} + x \cdot x^{n-1}$

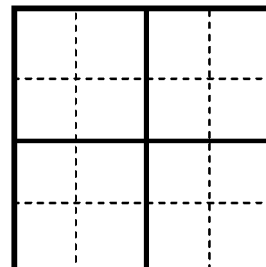
$\det(xI - A) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j = (x+1)^n$

A equação pedida é $\det(xI - A) = 0$, então:

$\det(xI - A) = (x+1)^n = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

09. A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO 09

Há $4! = 24$ maneiras de preencher o quadrado A com os números 1, 2, 3, 4. Feito isso, vamos agora preencher o quadrado D. Colocamos o número 1 em qualquer posição do quadrado D (4 maneiras). Depois disso, teremos uma situação como a seguinte:

A	B
C	D

1	2		
3	4		x
		c	a
	y	b	1

Agora, o número a não pode ser 2, pois ficaríamos sem opção para x, e o número b não pode ser 3, pois ficaríamos sem opção para y. Assim, nosso próximo passo é escolher o valor de c entre os números 2, 3 e 4, o que determina imediatamente a e b devido às restrições que acabamos de observar. É fácil ver que, para as demais posições do número 1 em D, obtemos uma situação análoga. Logo há $4 \times 3 = 12$ maneiras de completar o quadrado D depois de preenchido o A.

Feito isso, todos os espaços que sobraram têm uma única maneira de serem preenchidos. Assim, o número total de maneiras de preencher os quadrados é $24 \times 12 = 288$.

10. Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação $\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2+x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2+x^2}} = 2\sqrt{2}x$, para $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq a$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 10

Desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}} &= 2\sqrt{2}x \Rightarrow \\ \sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} &= 2\sqrt{2}x \Rightarrow \\ \sqrt{a}\sqrt{a+a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} &= 2\sqrt{2}x \Rightarrow \\ \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} &= 2\sqrt{2}x \Rightarrow \\ a\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} &= 2\sqrt{2}x \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} &= \sqrt{2} \cdot \frac{x}{a} \end{aligned}$$

Agora, como $0 \leq x \leq a$, dividindo toda essa desigualdade por $a > 0$ temos $0 \leq \frac{x}{a} \leq 1$. Assim, para cada $a \geq x$, existe

um único $q \in \mathbb{R}$, com $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$, para o qual $\frac{x}{a} = \text{sen } q$.

Como $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$, vale que $\cos q \geq 0$. Portanto:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2 q} = \sqrt{\cos^2 q} = |\cos q| = \cos q$$

A equação fica reduzida a:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos q} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\cos q} = \sqrt{2} \cdot \text{sen } q$$

Utilizando as relações de arco duplo, temos:

$$\cos q = 2\cos^2\left(\frac{q}{2}\right) - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{q}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos q = 2\cos^2\left(\frac{q}{2}\right) \\ 1 - \cos q = 2\text{sen}^2\left(\frac{q}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Como } 0 \leq q \leq \frac{p}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{q}{2} \leq \frac{p}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{q}{2}\right) \geq 0 \\ \cos\left(\frac{q}{2}\right) \geq 0 \end{cases}, \text{ temos:}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{q}{2}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\text{sen}^2\left(\frac{q}{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \text{sen } q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{q}{2}\right)\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\left|\text{sen}\left(\frac{q}{2}\right)\right| = \sqrt{2} \cdot \text{sen } q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\left(\frac{q}{2}\right) = \text{sen } q \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(\frac{p}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p}{6}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{q}{2}\right) = \text{sen } q \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(\frac{p}{6} + \frac{q}{2}\right) = \text{sen } q$$

$$\text{Como } 0 \leq q \leq \frac{p}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{q}{2} \leq \frac{p}{4} \Rightarrow 0 + \frac{p}{6} \leq \frac{q}{2} + \frac{p}{6} \leq \frac{p}{4} + \frac{p}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{p}{6} \leq \frac{q}{2} + \frac{p}{6} \leq \frac{5p}{12}$$

Logo $\frac{q}{2} + \frac{p}{6}$ pertence ao primeiro quadrante.

Assim, sendo q e $\frac{q}{2} + \frac{p}{6}$ dois ângulos do primeiro quadrante, tais que $\text{sen}\left(\frac{p}{6} + \frac{q}{2}\right) = \text{sen } q$, a única possibilidade é que eles sejam iguais. Logo:

$$q = \frac{q}{2} + \frac{p}{6} \Rightarrow q = \frac{p}{3}$$

$$\text{Temos então: } \frac{x}{a} = \text{sen}\left(\frac{p}{3}\right) \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$