# ELITE CURITIBA

## GABARITO DE MATEMÁTICA

## IME 2008 DISCURSIVAS

O **ELITE CURITIBA** aprova mais porque tem qualidade, seriedade e profissionalismo como lemas.
Confira nossos resultados e comprove porque temos mais a oferecer.

### IME 2007

**11** dos **16** aprovados no PARANÁ, incluindo os **4** melhores da **ativa** e os **4** melhores da **reserva**.

**CACFG/Reserva**
**1°** Lugar do Paraná (**9° do Brasil**) :
GUILHERME A. LOURENÇO PEREIRA
Maiores notas do Paraná em Matemática (9,50) e Física (9,00).
**2°** Lugar do Paraná (**74° do Brasil**) : CAMILA S. DEOLINDO
Maior nota do Paraná em Química (8,30)
**3°** Lugar do Paraná (**83° do Brasil**) : RICARDO M. O. SILVA PINTO
**4°** Lugar do Paraná : MAURICIO FLÁVIO DOMPSIN DE MORAES
**7°** Lugar do Paraná : EDUARDO CROMACK LIPPMANN

**CACFG/Ativa**
**1°** Lugar do Paraná (**15° do Brasil**) : NORTON D. V. DE ASSIS
Maiores notas do Paraná em Química (8,30) e em Inglês (10,00).
**2°** Lugar do Paraná (**30° do Brasil**) : VITOR A. C. MARTINS
**3°** Lugar do Paraná (**43° do Brasil**) : ANDRÉ C. COSTA PINTO
Maiores notas do Paraná na objetiva (9,25) e em Inglês (10,00)
**4°** Lugar do Paraná (**84° do Brasil**) : SÉRGIO J. BUFFON JÚNIOR
**7°** Lugar do Paraná : JULIANO AUGUSTO DE BONFIM GRIPP
**8°** Lugar do Paraná : ALEXANDRE GOMES DA COSTA

### IME 2006

Os **4 únicos** aprovados do PARANÁ
GABRIEL KENDJY KOIKE
FRANCIS HALLEY QUEIROZ SANT'ANNA
GUILHERME AUGUSTO LOURENÇO PEREIRA
OTTO CARLOS LIPPMANN

### IME 2005

**7** aprovados e os **3 ÚNICOS** convocados do Paraná
**1º** Lugar do Paraná (**6º do Brasil**): EDUARDO H. LEITNER
**2°** Lugar do Paraná: FELLIPE L. CARVALHO
**3°** Lugar do Paraná: SABRINA D. DIAS MANCIO

### ITA 2007

Os **2 únicos** aprovados no PARANÁ
CAMILA SARDETO DEOLINDO
VITOR A. CARLESSE MARTINS

### ITA 2006

Os **3 únicos** aprovados de Curitiba
GABRIEL KENDJY KOIKE
RICARDO I. S. TOMINAGA
YVES CONSELVAN

### ITA 2005

2 dos 3 únicos aprovados no PARANÁ
FELLIPE CARVALHO
EDUARDO LEITNER

**Escola Naval 2006**
**Único** aprovado do PARANÁ: DANILO SILVEIRA DA COSTA

**Escola Naval 2005**
**Únicos** aprovados do PARANÁ:
LEONEL AZEVEDO BASTOS
JEAN MICHEL ERHARDT

**EPCAr – 2007:** **3** dos **4** convocados do Paraná (3º Ano)

ENZO BERNARDES RIZZO (**1º** do Paraná)
CÉSAR BRITO DA SILVA
VINÍCIUS ORMIANIN ARANTES SOUSA

### AFA 2008

**1ºs lugares do Paraná em todas as opções de carreira.**

**AVIAÇÃO:**
JULIANO AUGUSTO DE BONFIM GRIPP
(**1°** do PR, **6°** do Brasil)
LUCAS BRIANEZ FONTOURA
(**3°** do PR, **17°** do Brasil)
YASSER ARAFAT BELÉM DE FIGUEIREDO (**4°** do PR)
MAURÍCIO FLÁVIO DOMPSIN DE MORAES (**5°** do PR)
LEONARDO AUGUSTO SEKI (**6°** do PR)
RAFAEL THOFEHRN CASTRO (**7°** do PR)
LUÍS FELIPE THOFEHRN CASTRO (**8°** do PR)

**AVIAÇÃO (FEMININO) :**
VANESSA HUNGRIA (**2°** do PR)

**INTENDÊNCIA:**
SÉRGIO JOÃO BUFFON JÚNIOR (**1°** do PR, **18°** do Brasil)
ALLISON FAUAT SCHRAIER (**3°** do PR)
DANIEL FREITAS DE LIMA (**6°** do PR)

**INFANTARIA:**
FÁBIO BECK WANDERER (**1°** do PR, **17°** do Brasil)
BRUNO CASAS DO NASCIMENTO (**2°** do PR)

### AFA 2007

**10** dos **14** convocados do Paraná

**1° LUGAR GERAL DO BRASIL EM AVIAÇÃO:** GUILHERME AUGUSTO LOURENÇO PEREIRA.

**1°** do Paraná (**3° do Brasil**) em **Infantaria:**
ANDRÉ C. COSTA PINTO

**1°** do Paraná (**22° do Brasil**) em **Intendência:**
SÉRGIO JOÃO BUFFON JÚNIOR

### AFA 2006

**11** dos **18** convocados do Paraná são do **ELITE CURITIBA** incluindo:
**1º** Lugar do Paraná (**6° do Brasil**) em **Aviação**:
GABRIEL K. KOIKE
**1º** Lugar do Paraná (e **9º do Brasil**) em **Intendência:**
CLÁUDIA L. ADÃO

**AMAN 2006** **Unico** aprovado do Paraná: THIAGO R. NOGUEIRA

**AMAN 2005** **Único** aprovado do Paraná: EDUARDO LEITNER

**ESPCEX 2006**
9 alunos convocados no Paraná (turma de 20 alunos)

ELITE CURITIBA

Fone:(41) **3013-5400**
**www.ELITECURITIBA.com.br**

**Questão 01**

Determine o conjunto-solução da equação
$sen^3x+cos^3x = 1-sen^2x.cos^2x$

**Solução:**
$sen^3x+cos^3x = 1-sen^2x.cos^2x$
$(senx+cosx).(sen^2x-senx.cosx+cos^2x)=(1-senx.cosx).(1+senx.cosx)$
$(senx+cosx).(1-senx.cosx)=(1-senx.cosx).(1+senx.cosx)$
1ª possibilidade: $1-senx.cosx = 0$
$senx.cosx=1 \rightarrow sen2x=2 \rightarrow$ não existe x nestas condições

2ª possibilidade: $1-senx.cosx \neq 0$
Neste caso: $senx+cosx = 1+ senx.cosx$ (i)

Substituindo $senx + cosx = t \Rightarrow senx.cosx = \dfrac{t^2-1}{2}$

A equação (i) fica: $t^2-2t+1=0$ , cuja única solução é para t = 1.

Então: $sen(x) + cos(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}sen(x)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow x=2k\pi \\ ou \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

Assim, podemos escrever o conjunto solução como:

$$S=\left\{x\in\Re \,/\, x=2k\pi \quad ou \quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ,k\in Z\right\}$$

**Questão 02**

Encontre o polinômio $P(x)$ tal que $Q(x)+1=(x+1)^3\cdot P(x)$ e $Q(x)+2$ é divisível por $x^4$, onde $Q(x)$ é um polinômio do 6° grau.

**SOLUÇÃO:**
$Q(x)$ é polinômio de 6° grau:

$$Q(x)=a_6\cdot x^6+a_5\cdot x^5+a_4\cdot x^4+a_3\cdot x^3+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

$Q(x)+2$ é divisível por $x^4$:

$$\frac{Q(x)+2}{x^4}=b_2\cdot x^2+b_1\cdot x+b_0 \Rightarrow a_3=a_2=a_1=0 \text{ e } a_0=-2$$

Logo, $Q(x)=a_6\cdot x^6+a_5\cdot x^5+a_4\cdot x^4-2$

$$P(x)\cdot(x-1)^3=Q(x)+1$$

$$P(x)=c_3\cdot x^3+c_2\cdot x^2+c_1\cdot x+c_0$$

$$P(x)\cdot(x-1)^3=c_3\cdot x^6+(c_2-3\cdot c_3)\cdot x^5+(c_1-3\cdot c_2+3\cdot c_3)\cdot x^4+$$
$$+(c_0-3\cdot c_1+3\cdot c_2-c_3)\cdot x^3+(3\cdot c_1-3\cdot c_0-c_2)\cdot x^2+$$
$$+(3\cdot c_0-c_1)\cdot x-c_0$$

$$Q(x)+1=a_6\cdot x^6+a_5\cdot x^5+a_4\cdot x^4-1$$

Então, $c_0=1$ ; $c_1=3\cdot c_0=3$ ; $c_2=3\cdot(c_1-c_0)=6$ ;
$c_3=3\cdot c_2-3\cdot c_1+c_0=10$

Logo, $P(x)=10\cdot x^3+6\cdot x^2+3\cdot x+1$

Obs: prosseguindo com os cálculos, encontraremos
$Q(x)=10\cdot x^6-24\cdot x^5+15\cdot x^4-2$ .

**Questão 03**

Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações lineares e quatro incógnitas (x, y, z e w) são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo que CD = -DC, onde $C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}$.

**Solução:**
Por hipótese, temos:

$$CD=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw\end{bmatrix};$$

$$DC=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw\end{bmatrix}.$$

Como CD = – DC ⇒ CD + DC = 0 ⇒ $\begin{cases} 2ax+cy+bz=0 \\ bx+(a+d)y+bw=0 \\ cx+(a+d)z+cw=0 \\ cy+bz+2dw=0\end{cases}$.

Assim, o referido sistema é um sistema homogêneo 4 por 4 que admite solução não-trivial se e somente se o sistema for possível e indeterminado, ou seja, se o determinante dos coeficientes for zero.
A matriz associada dos coeficientes é dada por:

$$D=\begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d\end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante de D por Laplace na primeira coluna, temos:

$$D=2a.\underbrace{\begin{vmatrix} a+d & 0 & b \\ 0 & a+d & c \\ c & b & 2d\end{vmatrix}}_{D_1}-b.\underbrace{\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ 0 & a+d & c \\ c & b & 2d\end{vmatrix}}_{D_2}+c.\underbrace{\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ a+d & 0 & b \\ c & b & 2d\end{vmatrix}}_{D_3}.$$

Mas,
$D_1 = 2d(a+d)^2 – bc(a+d) – bc(a+d) = 2d(a+d)^2 – 2bc(a+d)$
$D_2 = 2cd(a+d) +bc^2 – bc^2 = 2cd(a+d)$
$D_3 = b^2c – b^2c – 2bd(a+d) = – 2bd(a+d)$

Assim,
$D = 2a.[2d(a+d)^2 – 2bc(a+d)] – b.2cd(a+d) – c.2bd(a+d)$
$D =4ad(a+d)^2 – 4abc(a+d) – 4bcd(a+d)$
$D =4ad(a+d)^2 – 4bc(a^2 +ad + ad+d^2)$
$D =4ad(a+d)^2 – 4bc(a+d)^2$
$D =4(a+d)^2(ad – bc)$.
Fazendo o determinante igual a zero, temos:
$(a+d)^2(ad – bc)=0 \Leftrightarrow$ **ad=bc ou a = – d.**

**Questão 04**

Uma seqüência de quatro termos forma uma PG. Subtraindo-se 2 do primeiro termo e *k* do quarto termo, transforma-se a seqüência original em uma PA. Uma terceira seqüência é obtida somando-se os termos correspondentes da PG e da PA. Finalmente, uma quarta seqüência, uma nova PA, é obtida a partir da terceira seqüência, subtraindo-se 2 do terceiro termo e sete do quarto. Determine os termos da PG original.

**Solução:**
Inicialmente, vamos definir os termos de cada uma das seqüências:
PG original: $(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3)$
A partir dela monta-se a seqüência seguinte:
1ª PA: $(a_1 – 2, a_1q, a_1q^2, a_1q^3 – k)$
Somando-se os termos das duas, temos a terceira seqüência:
$(2a_1 –2, 2a_1q, 2a_1q^2, 2a_1q^3 – k)$
De onde obtemos a outra PA:
2ª PA: $(2a_1 –2, 2a_1q, 2a_1q^2 - 2, 2a_1q^3 – k – 7)$

Como a soma dos termos eqüidistantes de uma PA é constante, podemos escrever a partir da 1ª PA:
$a_1 – 2 + a_1q^3 – k = a_1q + a_1q^2$ (I)
Analogamente para a 2ª PA:
$2a_1 –2 +2a_1q^3 – k – 7 = 2a_1q + 2a_1q^2 – 2$ (II)
Fazendo (II) – 2(I):
$2 + k – 7 = - 2 \Rightarrow k = 3$

Considerando-se três termos consecutivos de uma PA, sabemos que o segundo é a media aritmética entre o primeiro e o terceiro. Isso nos dá a seguinte relação entre os 3 primeiros termos da 1ª PA:
$a_1q^2 + (a_1 – 2) = 2a_1q$
De onde: $a_1(q^2 – 2q + 1) = 2 \Rightarrow a_1(q – 1)^2 = 2$ (III)
Analogamente, para os 3 últimos termos dessa mesma PA:
$a_1q^3 – 3 + a_1q = 2a_1q^2$
De onde: $a_1q(q^2 - 2q + 1) = 3 \Rightarrow a_1q(q-1)^2 = 3$ (IV)
Substituindo (III) em (IV), temos: $q = 3/2$
Portanto: $a_1(3/2 - 1)^2 = 2 \Rightarrow a_1 = 8$
A PG pedida é (8, 12, 18, 27)

## Questão 05

Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

**Solução:**

Seja $A_1$ = número de possibilidades onde temos a equipe 1 com pilotos na mesma linha.

$A_2$ = número de possibilidades onde temos a equipe 2 com pilotos na mesma linha.

$A_3$ = número de possibilidades onde temos a equipe 3 com pilotos na mesma linha.

$A_4$ = número de possibilidades onde temos a equipe 4 com pilotos na mesma linha.

$A_5$ = número de possibilidades onde temos a equipe 5 com pilotos na mesma linha.

Logo $A_K$ = número de possibilidades onde temos a equipe k com pilotos na mesma linha.

Onde, $A_i = C_5^1.2^k.8!$ (para i = 1 até 5) $\rightarrow$ primeiro escolhemos a(s) linha(s) que vai(ão) conter a(s) dupla(s) da mesma equipe, depois trocamos os 2 pilotos de coluna, depois permutamos os outros pilotos. (aqui, consideramos que os carros da mesma equipe são distintos)

Analogamente:

$n(A_i \cap A_j) = C_5^2.2^2.6!$ (para i = 1 até 5, j = 1 até 5, com i ≠ j)

$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = C_5^3.2^3.4!$ ( i ≠ j ≠ k, variando de 1 a 5 )

$n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) = C_5^4.2^4.2!$ (i ≠ j ≠ k ≠ p, variando de 1 a 5)

$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = C_5^5.2^5$

O que procuramos é

$10! - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) =$

$10! - [\, n(A_1) + \ldots + n(A_5)] + [\, n(A_1 \cap A_2) + \ldots + n(A_4 \cap A_5)] - \ldots - [\, n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)] =$

$10! - C_5^1.n(A_i) + C_5^2.n(A_i \cap A_j) - C_5^3.n(A_i \cap A_j \cap A_k) +$

$+ C_5^4.n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) - C_5^5.n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$

3.628.800 - 2.016.000 + 576.000 - 115.200 + 19.200 - 3.840 =

**2.088.960 formações.**

## Questão 06

Determine a expressão da soma a seguir, onde n é um inteiro múltiplo de 4. $1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n+1).i^n$

**Solução:**

$S = 1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n+1).i^n$ (1)

Muliplicando ambos os lados por i:

$Si = i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + (n+1).i^{n+1}$ (2)

Fazendo (1) – (2):

$S(1-i) = 1 + (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n) - (n+1).i^{n+1}$

O termo entre parênteses é a soma de uma PG finita, portanto:

$$S(1-i) = 1 + \frac{i^n.i - i}{i-1} - (n+1).i^{n+1} = 1 + \frac{i^{n+1} - i}{i-1} - (n+1).i^{n+1}$$

Como n é múltiplo de 4 então $i^{n+1} = i$, logo:

$$S(1-i) = 1 + \frac{i-i}{i-1} - (n+1).i = 1-(n+1).i$$

$$S = \frac{1-(n+1)i}{1-i} = \frac{1-(n+1)i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i-(n+1)i+(n+1)}{2}$$

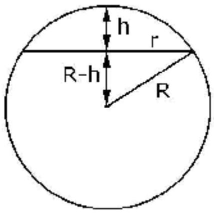
$$S = \frac{2+n-ni}{2} = \frac{2+n}{2} - \frac{n}{2}i$$

Observação: a banca examinadora omitiu a informação de que i é a unidade imaginária, dando margens a outras interpretações.

## Questão 07

A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

**Solução:**




Da figura, temos:

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 \Rightarrow h^2 - 2 \cdot R \cdot h + r^2 = 0 \Rightarrow h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

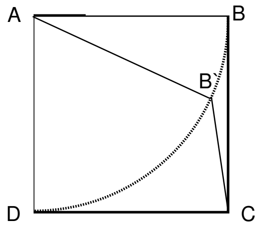
Sabemos que $S_{CAL} = 2 \cdot S_{BASE} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow$

$$r^2 = R \cdot h \Rightarrow r^2 = R \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow R^2 - r^2 = R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$R^4 - 2 \cdot R^2 \cdot r^2 + r^4 = R^4 - R^2 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 \cdot \left(r^2 - R^2\right) = 0 \Rightarrow r = R$$

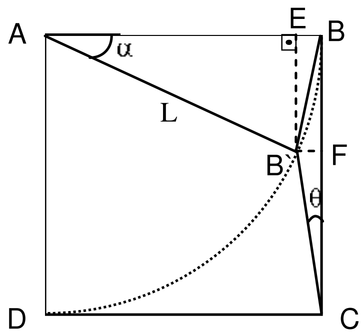
## Questão 08

Em um quadrado ABCD o segmento $AB'$, com comprimento igual ao lado do quadrado, descreve um arco de círculo, conforme indicado na figura. Determine o ângulo $B\hat{A}B'$ correspondente à posição em que a razão entre o comprimento do segmento $B'C$ e o lado do quadrado vale $\sqrt{3-\sqrt{6}}$.




**Solução:**

Seja L o lado do quadrado, x a medida do segmento B'C, $\alpha$ a medida do ângulo $B\hat{A}B'$, e $\theta$ a medida do ângulo $B\hat{C}B'$. Na figura, observe os pontos E e F indicados:




Na figura, temos que:

$$AB = AB' = L$$

$$AE = L\cos\alpha \Rightarrow EB = B'F = L(1-\cos\alpha)$$

$$BF = Lsen\alpha \Rightarrow FC = L(1-sen\alpha)$$

$$\cos\theta = \frac{FC}{B'C} = \frac{L(1-sen\alpha)}{x}$$

Vamos aplicar a lei dos co-senos duas vezes, uma no triângulo ABB' e outra no triângulo CBB'. Temos:

$$\begin{cases}(BB')^2 = (AB)^2 + (AB')^2 - 2(AB)(AB')\cos\alpha \\ (BB')^2 = (CB)^2 + (CB')^2 - 2(CB)(CB')\cos\theta\end{cases}$$

Igualando o segundo membro de cada uma dessas equações, e substituindo as relações acima, vem que:

$$L^2 + L^2 - 2LL\cos\alpha = L^2 + x^2 - 2Lx\frac{L(1-sen\alpha)}{x}$$

$$3L^2 = x^2 + 2L^2(sen\alpha + \cos\alpha)$$

Pelo enunciado, devemos ter:

$$\frac{x}{L} = \sqrt{3-\sqrt{6}} \Rightarrow x = L\sqrt{3-\sqrt{6}}$$

Então: $3L^2 = L^2(3-\sqrt{6}) + 2L^2(sen\alpha + \cos\alpha)$

$$sen\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow (sen\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$sen^2\alpha + 2sen\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{6}{4} \Rightarrow 1 + sen(2\alpha) = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$sen(2\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = 30° \text{ ou } 2\alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 15° \text{ ou } \alpha = 75°$$

## Questão 09

Considere os números complexos $Z_1 = sen\alpha + i\cos\alpha$ e $Z_2 = \cos\alpha - i\,sen\alpha$, onde $\alpha$ é um número real.Mostre que, se $Z = Z_1 Z_2$, então $-1 \le R_e(Z) \le 1$ e $-1 \le I_m(Z) \le 1$, onde $R_e(Z)$ e $I_m(Z)$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária de Z.

**Solução:**

$Z = (sen\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\,sen\alpha) =$

$sen\alpha.\cos\alpha - i sen^2\alpha + i\cos^2\alpha - i^2 sen\alpha\cos\alpha =$

$2sen\alpha.\cos\alpha + i(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = sen2\alpha + i(\cos 2\alpha)$

Temos:

$-1 \le sen2\alpha \le 1 \Rightarrow -1 \le R_e(Z) \le 1$

$-1 \le \cos 2\alpha \le 1 \Rightarrow -1 \le I_m(Z) \le 1$

## Questão 10

Considere todos os pontos de coordenadas (x,y) que pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 14 = 0$. Determine o maior valor possível de $\frac{y}{x}$.

**Solução:**

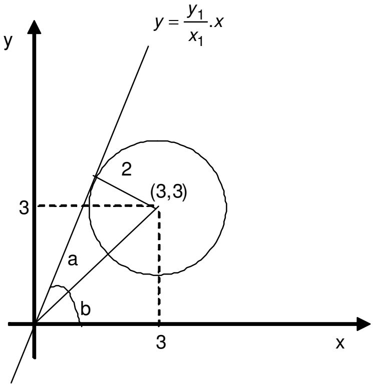
Pela equação vemos que se trata de uma circunferência centrado no ponto (3,3) e de raio 2 pois:

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

Seja $(x_1, y_1)$ o ponto de circunferência com maior valor para $\frac{y}{x}$.

A reta que passa pela origem e contém o ponto $(x_1, y_1)$ dado tem a seguinte equação $y = \frac{y_1}{x_1}.x$, logo pretendemos encontrar a reta secante à circunferência de maior coeficiente angular, logo será a reta tangente.

Queremos então determinar o valor de $\frac{y_1}{x_1}$.




O coeficiente angular procurado é $\frac{y_1}{x_1}$ que pela figura percebemos ser:

$\frac{y_1}{x_1} = tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$, onde : $tgb = 1$ e sena = $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

Logo, sena $= \frac{\sqrt{2}}{3}$, daí cosa = $\frac{\sqrt{7}}{9}$ e tga $= \frac{\sqrt{14}}{7} \rightarrow$

Temos: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{\frac{\sqrt{14}+1}{7}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}}$, logo $\frac{y}{x} = \frac{7+\sqrt{14}}{7-\sqrt{14}}$

**Racionalizando:** $\frac{y}{x} = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{5}$